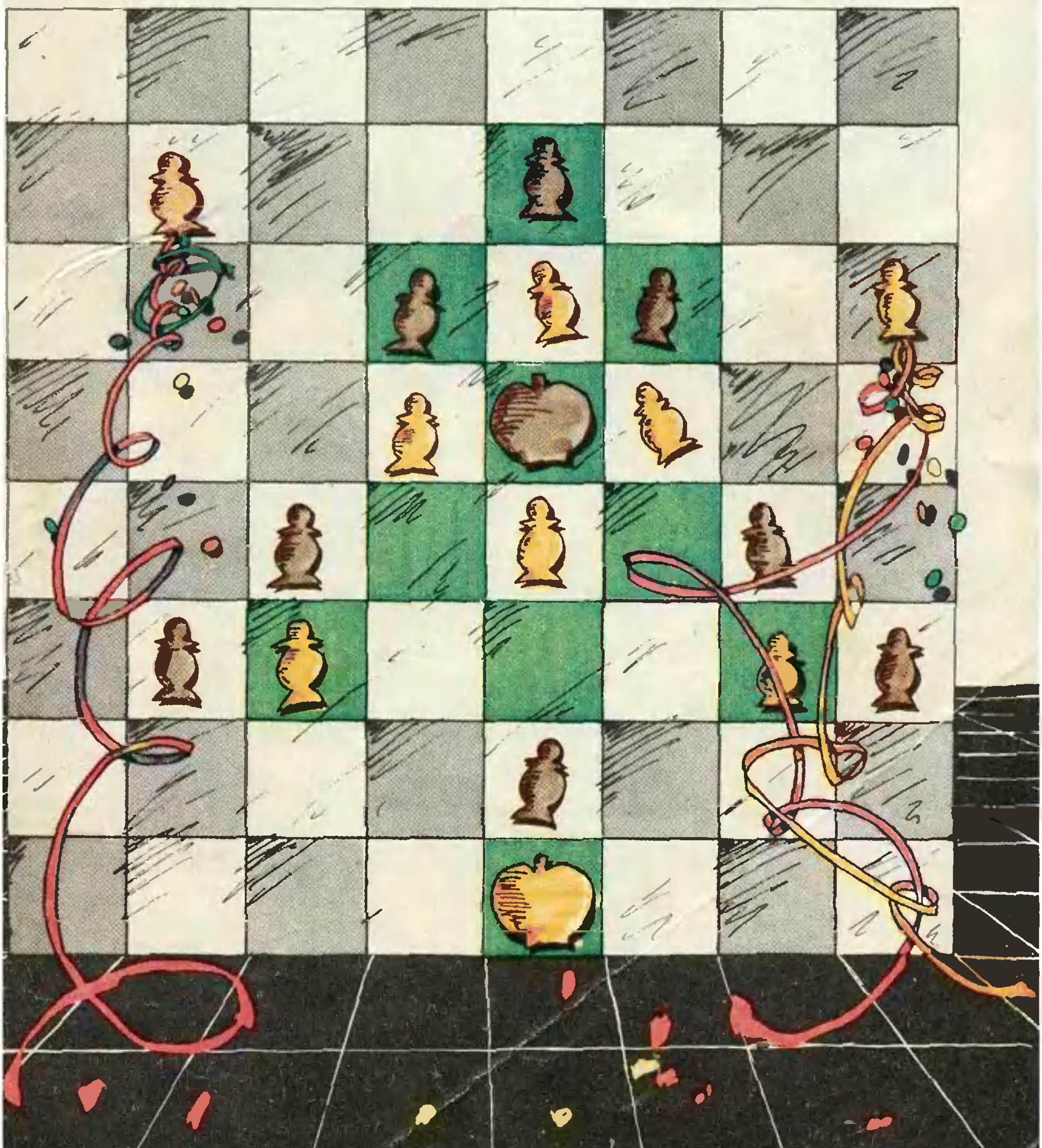
ISSN 0130-2221

Квант

12
1986

*Научно-популярный физико-математический журнал
Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР*



Эварист Галуа

К 175-летию со дня рождения

(см. с. 2)

Научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

Квант

12 1986

Основан в 1970 году

Издательство „Наука". Главная редакция физико-математической литературы

В НОМЕРЕ: / **IN THIS ISSUE:**

Симпатичная елочка на первой странице обложки — наш новогодний шахматный привет читателям журнала. Две хлопушки (белые пешки) сначала летят вверх: 1. h7 b2 2. b8Л! h2 3. h8Л! *(угрозы пата ликвидированы), а затем осыпаются вниз:* 3... **b1Ф+ 4. Л:b1 h1Ф+ 5. Л:h1** *(автор задачи — М. Зинар, 1985 г. Выигрыш). О других симметричных этюдах рассказано на сегодняшней шахматной страничке.*

Эварист Галуа

Кандидат физико-математических наук
Ю. П. СОЛОВЬЕВ

«Весною 1832 года Париж кипел и был готов к революционному взрыву, хотя три месяца без перерыва холера леденила умы и набросила на их волнение мрачный покров спокойствия. Великий город в это время походил на заряженную пушку, для которой бывает достаточно одной искры, чтобы она выстрелила». Это строки из романа Виктора Гюго «Отверженные», бывшего очевидцем тех грозных событий. Во вторник 5 июня в Париже вспыхнуло грандиозное восстание, на баррикадах которого погиб Гаврош — «маленький человек с великой душой». По-видимому, лишь немногие обратили внимание в эти тревожные дни на коротенькую заметку в парижских газетах. В ней сообщалось, что утром 30 мая на дуэли в возрасте 20 лет погиб Эварист Галуа, известный своими политическими выступлениями выпускник коллежа Луи-ле-Гран. В субботу 2 июня он был похоронен в общей могиле на кладбище Монпарнас. Ныне от этого погребения не сохранилось и следа.

После смерти Галуа остались шестьдесят страниц его неоконченного математического сочинения. Эта рукопись попала к Огюсту Шевалье, другу Галуа, но тот не мог найти никого, кто согласился бы ее издать; она увидела свет лишь в 1846 году. В этой рукописи содержалась теория, которая вот уже 140 лет оказывает влияние не только на математику, но и на все точное естествознание...

Жизнь и смерть

*Nitens lux, horrenda procella, tenebris aeternis involuta.**)

Эварист Галуа родился 26 октября 1811 года в старинном городке Бур-ля-Рен, расположенном в десяти километрах от Парижа. Его отец, Никола Габриэль, руководил там учебным заведением для юношей. В 1815 году он был избран мэром городка и оставался на этом посту до самой своей кончины. Первые двенадцать лет своей жизни Эварист получал воспитание и образование под руководством матери. Мальчик изучал греческий и латинский языки, проводил время за Плутархом и Титом Ливием.

В октябре 1823 года Эварист был принят в Королевский коллеж Луи-ле-Гран в Париже (ныне лицей Луи-ле-Гран), знаменитое учебное заведение, воспитанниками которого были Мольер, Гюго, Робеспьер, Делакруа. В коллеже Галуа получал стипендию и жил на полном пансионе. Первые три года он считался одним из лучших учеников и с удовольствием занимался языками, литературой, историей. В октябре 1826 года Галуа начал заниматься в старшем классе коллежа — классе риторики, однако у него появились признаки утомления, и по рекомендации директора в январе 1827 года он вернулся на повторный курс. Там он вновь без малейшего усилия стал одним из первых учеников, получил награду за перевод с греческого и похвальные листы по четырем другим предметам. В это же время в жизни Эвариста произошло важное событие: он открыл для себя мир математики.

Дело в том, что до класса риторики все учащиеся коллежа занимались по общей программе, включавшей в себя гуманитарные дисциплины и лишь начатки точных наук. Однако учащиеся, питавшие интерес к точным наукам, могли в последние два года обучения заниматься математикой в подготовительном математическом классе. Те, кто хотел посвятить себя математике, должны были после подготовительного пройти годичный основной и годичный специальный математические классы.

Галуа воспользовался возвращением на повторный курс, чтобы одновременно поступить в подготовительный математический класс. Почти сразу же обнаружились его необыкновенные математические способности: он без труда одолел непростую книгу Лежандра «Основы геометрии» и принялся изучать сочинения Лагранжа «Решение численных уравнений», «Теория аналитических функций», «Лекции по теории функций».

Осенью 1827 года Эварист возвращается в класс риторики и продолжает занятия в подготовительном математическом классе. Школьная рутина тяготит его; он целиком поглощен математикой. По словам одного из учителей Галуа: «Страсть к математике владеет им; я думаю, что для него было бы лучше, если бы его родители согласились, чтобы он занимался только этой наукой: в классе

*) «Ослепляющий свет, ужасная буря, окруженная вечным мраком» (лат.). Этими словами оканчивается одно из писем, написанных Э. Галуа в ночь перед дуэлью.

риторики он теряет время и только изводит своих учителей и навлекает на себя наказания».

В это время Эварист знакомится с работами Гаусса и Абеля и чувствует, что способен сделать не меньше. Будучи всего лишь учеником подготовительного класса, он без посторонней помощи готовится к экзаменам в Политехническую школу — лучшее по тем временам высшее учебное заведение Франции. Эварист верит, что в ней найдут применение все силы и энергия его ума и сердца.

Попытка поступить в Политехническую школу кончилась неудачей. Провал очень огорчил Галуа и, по словам историка математики Дюпюи, «явился первой из несправедливостей, которые в конце концов отравили ему жизнь». Эварист возвращается в порядком надоевший ему коллеж и, перескочив основной, поступает в специальный математический класс. Работал в нем тогда Луи-Поль Ришар, замечательный преподаватель, горячо любивший свою науку. Среди тех, кто в разные годы занимался у него, были, кроме Галуа, знаменитый астроном Леверье и выдающийся математик Эрмит.

Ришар с большим вниманием отнесся к юному ученику, которого он считал самым одаренным из своих воспитанников. Отзывы Ришара о Галуа лаконичны: «Галуа работает только в высших областях математики», «Он значительно выше всех своих товарищей». Под руководством Ришара Эварист выполнил свою первую научную работу «Доказательство одной теоремы о периодических непрерывных дробях», опубликованную в марте 1829 года в «Ле анналь де математик». В это же время под влиянием работ Лагранжа Галуа начинает интенсивно заниматься одной из самых трудных математических проблем того времени — проблемой разрешимости алгебраических уравнений в радикалах.

Проблема эта имеет долгую историю. Еще вавилоняне открыли способ решения уравнения второй степени $ax^2+bx+c=0$. Корни его в современной символике задаются формулой

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

в которую входят четыре арифметических действия над коэффициентами, а также квадратный радикал. В начале шестнадцатого века Сципионе дель Ферро и Никколо Фонтана, более известный под именем Тарталья, получили формулу для корней кубического уравнения, в которую входят четыре арифметических действия и квадратичный и кубический радикалы. Несколько позже Лодовико Феррари открыл формулу для корней уравнения четвертой степени, в которую входят радикалы самое большее четвертой степени. Естественно было ожидать, что корни алгебраического уравнения степени n

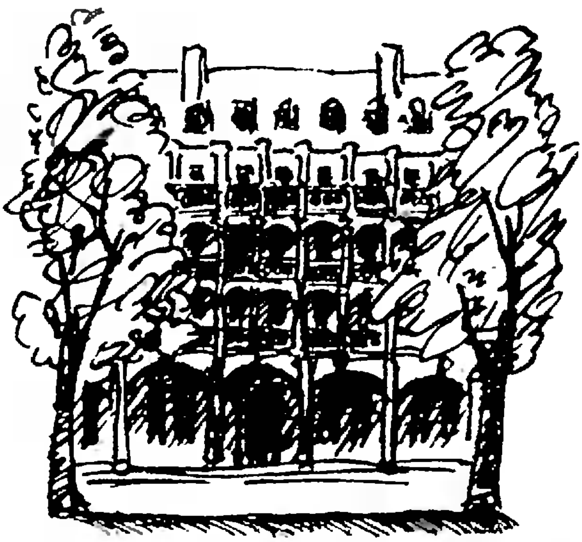
$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n=0\ (a_0\neq 0)$$

должны выражаться через радикалы самое большее n-ой степени. Но, несмотря на титанические усилия самых выдающихся математиков на протяжении почти трех веков, такую формулу не удалось получить даже для уравнения пятой степени. В конце восемнадцатого века математики начали подозревать, что формул в радикалах для уравнений степени $n\geq 5$ просто не существует, потому-то их и не удается найти.

Важный шаг в исследовании алгебраических уравнений был сделан Жозефом Луи Лагранжем (см., например, «Квант», 1986, № 9, с. 3), открывшим, что решение уравнений в радикалах тесно связано с перестановками их корней. Эта идея Лагранжа, названная им «истинной философией решения уравнений», была существенно развита гениальным норвежским математиком Нильсом Генриком Абелем. В 1824 году в возрасте двадцати двух лет Абель доказал, что не существует формул, которые бы решали в радикалах алгебраическое уравнение степени $n\geq 5$ общего вида.

После появления теоремы Абеля сразу же встал вопрос о нахождении необходимого и достаточного условия, которое

Единственный портрет Эвариста, сделанный с натуры, когда ему было пятнадцать — шестнадцать лет.



Внутренний двор Лицея Луи-ле-Гран (Париж, улица Сен-Жак, 123). В этом лицее (в те времена — Королевском коллеже) Галуа провел шесть лет — с октября 1823 года по декабрь 1829 года.

по коэффициентам a_0, a_1, ..., a_n любого уравнения позволяло бы судить, решается оно в радикалах или нет.

В течение 1829—1831 гг. Эварист полностью решил эту труднейшую проблему. Первые результаты по теории уравнений появились у него еще весной 1829 года. Галуа направил их в Академию наук. Рассмотреть его работу взялся один из крупнейших французских математиков Коши, но... где-то ее затерял.

По окончании учебного года в специальном математическом классе Галуа вновь сделал попытку поступить в Политехническую школу и вновь провалился. Что произошло на экзамене, доподлинно неизвестно. Позже Галуа упомянул о нем, написав, что на экзамене его сопровождал «сумасшедший хохот экзаменаторов». Экзаменаторами Галуа были Бине и Лефебюр де Фурси. Мы не знаем, какие оценки они поставили Галуа; так или иначе, в Политехническую школу он не попал.

В то время, когда Эварист готовился к вступительным экзаменам, на него свалилась непоправимая беда: 2 июля 1829 года его отец, затравленный местным кюре и иезуитами, покончил с собой. Эти тяжелые дни, почти совпавшие по времени с его провалом, Эварист провел дома, вместе с матерью и младшим братом Альфредом.

По совету Ришара Эварист решил поступить в Приготовительную школу, жалкий остаток знаменитой Нормальной школы, созданной в годы Великой французской революции. В 1822 году Бурбоны закрыли Нормальную школу, а в 1826 году она была восстановлена под названием Приготовительной школы, как продолжение коллежа Луи-ле-Гран. Трехгодичная Приготовительная школа готовила учителей и государственных чиновников. 20 февраля 1830 года Эварист Галуа стал ее студентом.

Первый год обучения в Приготовительной школе оказался самым успешным в жизни Галуа. Здесь он познакомился с Огюстом Шевалье, и это знакомство вскоре переросло в крепкую дружбу. Галуа увлеченно занимался математикой. Он написал три работы и представил их на конкурс в Академию.

Неожиданно на него обрушивается новый удар. Рукопись Галуа попала в руки секретаря Академии Фурье, который вскоре после этого ... умер. В его бумагах рукописи Галуа не оказалось — она исчезла, как и первая, а вместе с ней надежда получить Большую математическую премию. Правда, у Эвариста сохранились копии посланных работ, и он опубликовал их в апрельском и июньском номерах «Бюллетеня математических наук», но это было слабым утешением. В своих повторяющихся несчастиях он увидел не волю случая, а результат плохой социальной организации, которая обрекала талант на вечные лишения к выгоде посредственности. И со всем пылом юности Эварист включается в борьбу за политическое переустройство общества.

В июле 1830 года давно собиравшиеся над режимом Бурбонов тучи разразились революционной грозой, лишившей власти короля Карла X. Симпатии Галуа целиком на стороне республиканцев. Он активно участвует в работе революционных кружков, вступает в Общество друзей народа. Но чаяниям республиканцев не удалось сбыться: к власти пришел ставленник крупного капитала «король-буржуа» Луи-Филипп. Возбуждение в Париже не утихает.

Осенью 1830 года Эварист выступает в печати с резкой критикой двурушнического поведения в июльские дни директора Приготовительной школы Гиньо. В результате 9 декабря его исключают из Школы. Надежда на математическую карьеру рухнула. Эварист вступает в артиллерию национальной гвардии, в большинстве своем состоявшую из членов Общества друзей народа. Это была вооруженная сила революции, и правительство Луи-Филиппа вскоре распускает национальную гвардию. Эварист остается без средств к существованию; лишь частные уроки позволяют ему свести концы с концами.

Все помыслы его в это время отданы революции — математика отходит на второй план. И все же он находит время и силы, чтобы еще раз послать в Академию ту самую работу, которая была потеряна в прошлом году. Работа попала на отзыв двум академикам — Лакруа и Пуассону. После длительных проволочек они сообщают, что не могут оценить рукопись положительно.

В июне 1831 года Галуа предстает перед судом по обвинению «в попытке спровоцировать покушение на жизнь и особу короля Французов путем заявления, сделанного в общественном месте во время публичного собрания». Суд присяжных оправдывает Галуа, но он попадает под тайный надзор политической полиции.

14 июля 1831 года Галуа принимает участие в демонстрации. Ее участники протестуют против запрещения правительством Луи-Филиппа свободы манифестаций. Многие участники этой демонстрации были арестованы, и Эварист оказался в тюрьме Сент-Пелажи. Здесь он встретил свое двадцатилетие, и здесь же им было отредактировано его основное математическое сочинение. 16 марта 1832 года Галуа переводят в тюремную больницу с подозрением на холеру. Есть сведения, что Галуа оставался в ней еще некоторое время после того, как 29 апреля кончился срок его заключения. О его жизни в течение мая 1832 года не сохранилось никаких следов. Утром 30 мая какой-то прохожий нашел его тяжело раненным после дуэли на пистолетах на берегу пруда Гласьер в парижском пригороде Жантийи. На следующий день в 10 часов утра Галуа скончался. Причина его дуэли и его противник достоверно неизвестны. Перед смертью он написал письмо своему другу Огюсту Шевалье с просьбой показать его рукопись немецким математикам Якоби и Гауссу. Однако рукопись увидела свет лишь в 1846 году и осталась практически незамеченной. Идеи Галуа по-настоящему были поняты лишь в 70-х годах, после выхода в свет книги К. Жордана «Алгебраические уравнения и теория подстановок».

Бессмертие

В теории уравнений я исследовал, в каких случаях уравнения разрешаются в радикалах, что дало мне повод углубить эту теорию и описать все возможные преобразования уравнения, допустимые даже тогда, когда оно не решается в радикалах.

Рукопись, оставшаяся после Галуа, из которой взята эта цитата, называлась «Мемуар об условиях разрешимости уравнений в радикалах». Содержащиеся в этом мемуаре идеи были не поняты современниками Галуа и считаются нелегкими для изучения даже сейчас. В то же время, формулировка теоремы Галуа не сложна. Правда, вначале нужно усвоить несколько новых понятий.

Пусть имеется n предметов, которые мы будем обозначать натуральными числами 1, 2, ..., n. Их *подстановкой* называется преобразование множества этих предметов, задаваемое таблицей

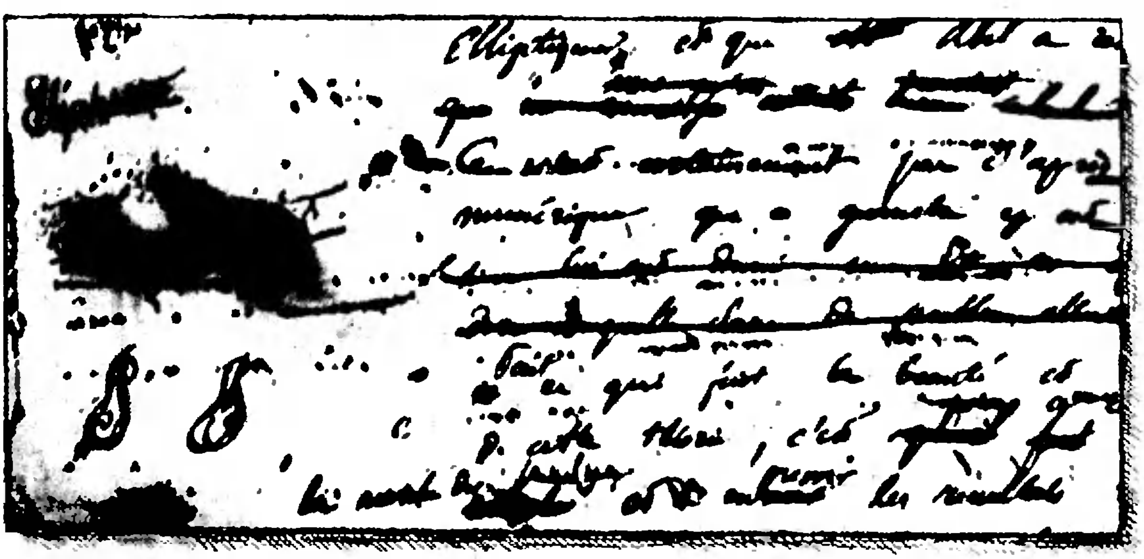
$$\begin{pmatrix} 1\ 2\ \ldots n \\ i_1\ i_2\ \ldots i_n \end{pmatrix},$$

где i_1, i_2, ..., i_n — это те же числа 1, 2, ..., n, но записанные в другом порядке. Каждая подстановка заключается в том, что на месте числа, стоящего в верхней строчке, ставится подписанное под ним число в нижней строчке.

Из n чисел можно сделать $n!$ различных подстановок. Например, из трех чисел 1, 2, 3 можно сделать следующие подстановки:

$$p_0=\begin{pmatrix}123\\123\end{pmatrix},\ p_1=\begin{pmatrix}123\\312\end{pmatrix},\ p_2=\begin{pmatrix}123\\231\end{pmatrix},$$
$$p_3=\begin{pmatrix}123\\132\end{pmatrix},\ p_4=\begin{pmatrix}123\\213\end{pmatrix},\ p_5=\begin{pmatrix}123\\321\end{pmatrix}.$$

Множество подстановок из n предметов обычно обозначается через S_n.



Фрагмент чернового варианта математической рукописи Галуа.

Современники знали Галуа лишь как пламенного революционера — республиканца. Публично «хорошим математиком» он был впервые назван уже после своей гибели. 7 июня 1832 года газета «Газетт де опито» поместила сообщение полиции: «Юный Эварист Галуа, двадцати одного года, хороший математик, кроме того, известный своим пылким воображением, умер в 12 часов от острого перитонита, вызванного пулей, выпущенной с 25 шагов».

С подстановками из одного и того же числа предметов можно совершать различные алгебраические операции. Прежде всего, их можно перемножать. *Перемножить* две подстановки — это значит последовательно произвести их одну за другой. В результате получится опять подстановка, называемая *произведением* двух данных подстановок. Перемножим, например, подстановки из трех предметов

$$\binom{123}{213} \text{ и } \binom{123}{321}.$$

В силу первой подстановки единица заменится двойкой, а в силу второй подстановки эта двойка останется на месте. Таким образом, в результате последовательного совершения обеих подстановок единица перейдет в двойку. Точно так же можно убедиться, что двойка перейдет в тройку, а тройка перейдет в единицу:

$$\binom{123}{213}\cdot\binom{123}{321}=\binom{123}{231}.$$

Аналогично перемножаются и любые две другие подстановки из трех предметов. В результате получается следующая таблица умножения:

	p_0	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5
p_0	[illegible]	[illegible]	[illegible]	p_3	p_4	p_5
p_1	[illegible]	[illegible]	[illegible]	p_4	p_3	p_5
p_2	[illegible]	[illegible]	[illegible]	p_5	p_3	p_4
p_3	p_3	p_5	p_4	p_0	p_2	p_1
p_4	p_4	p_3	p_5	p_1	p_0	p_2
p_5	p_5	p_4	p_3	p_2	p_1	p_0

Таблица 1

Непосредственной проверкой можно убедиться, что умножение подстановок удовлетворяет правилу раскрытия скобок: $(ab)c=a(bc)$ для любых трех подстановок a, b, c из S_n.

Тождественная подстановка

$$e=\binom{1\ 2\ \ldots n}{1\ 2\ \ldots n}$$

есть единственная подстановка, удовлетворяющая условию

$$\binom{1\ 2\ \ldots n}{1\ 2\ \ldots n}\cdot\binom{1\ 2\ \ldots n}{i_1 i_2 \ldots i_n}=$$
$$=\binom{1\ 2\ \ldots n}{i_1 i_2 \ldots i_n}\cdot\binom{1\ 2\ \ldots n}{1\ 2\ \ldots n}=\binom{1\ 2\ \ldots n}{i_1 i_2 \ldots i_n}$$

для произвольной подстановки

$$\binom{1\ 2\ \ldots n}{i_1 i_2 \ldots i_n}$$

из S_n.

У каждой подстановки имеется *обратная* к ней, дающая в произведении с данной тождественную подстановку: обратная подстановка к данной ставит все числа, смещенные подстановкой, на их прежние места. Например, для подстановок из трех предметов имеем

$$p_0^{-1}=p_0,\ p_1^{-1}=p_2,\ p_2^{-1}=p_1,\ p_3^{-1}=p_3,$$
$$p_4^{-1}=p_4,\ p_5^{-1}=p_5.$$

Введем теперь следующее определение. *Группой**) (более точно, *конечной группой*) называется любое множество G из S_n, которое вместе с каждыми двумя своими элементами a и b содержит элемент $a\cdot b$ и вместе с каждым элементом a — элемент a^{-1}. В частности, само множество S_n также является группой.

Уже на примере группы S_3 видно, что для умножения подстановок не выполняется переместительный закон: не всегда $a\cdot b=b\cdot a$. Если же для всех пар a, b элементов некоторой группы выполняется последнее равенство, то G называется *коммутативной* или *абелевой* группой. Проверьте, что из всех групп S_n, $n>1$, коммутативна лишь группа S_2.

Может случиться, что часть H группы G сама образует группу. Тогда H называется *подгруппой* группы G. Например, каждая группа содержит подгруппу, состоящую из тождественной подстановки e. С другой стороны, каждая (конечная) группа является подгруппой некоторой группы S_n. Тот факт, что H — подгруппа в G, обозначается так: $H\leqslant G$.

Для иллюстрации введенных понятий опишем все подгруппы в группе S_3. Из таблицы умножения (табл. 1) видно, что в S_3 содержится одна подгруппа, состоящая из одного элемента p_0, три подгруппы из двух элементов $(p_0,\ p_3)$, $(p_0,\ p_4)$, $(p_0,\ p_5)$ и одна подгруппа из трех элементов $(p_0,\ p_1,\ p_2)$. В таблице 1 эта подгруппа выделена синим цветом. Поскольку она еще встретится нам в даль-

*) Понятие группы впервые появилось в работах Лагранжа и Руффини. Термин «группа» введен Галуа.

нейшем, мы введем для нее специальное обозначение Z_3. Все эти подгруппы коммутативны. Предлагаем читателю самому убедиться, что других подгрупп в S_3 нет.

Пусть G — какая-нибудь группа и a, b — ее элементы. Выражение $[a,b]=aba^{-1}b^{-1}$, называется *коммутатором* элементов a и b: оно служит корректирующим членом для того, чтобы поменять местами a и b:

$$ab=[a,b]ba.$$

Если $ab=ba$, то $[a,b]=e$. Понятно, что чем больше в группе G коммутаторов, отличных от e, тем значительнее отклонение группы G от коммутативной. Назовем *производной группой* группы G ее подгруппу G', состоящую из всевозможных произведений вида

$$[a_1, b_1]\cdot[a_2, b_2]\cdot\ldots\cdot[a_k, b_k]$$

с a_1, ..., a_k, b_1 ..., b_k из G. Ясно, что если группа G коммутативна, то G' состоит всего лишь из тождественной подстановки e. В качестве несложного упражнения предлагаем читателю проверить, что коммутаторы группы S_3 задаются следующей таблицей:

$[p_i,p_j]$	p_0	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5
p_0	p_0	p_0	p_0	p_0	p_0	p_0
p_1	p_0	p_0	p_0	p_2	p_2	p_2
p_2	p_0	p_0	p_0	p_1	p_1	p_1
p_3	p_0	p_1	p_2	p_0	p_1	p_2
p_4	p_0	p_1	p_2	p_2	p_0	p_1
p_5	p_0	p_1	p_2	p_1	p_2	p_0

Таблица 2

Для G' также можно рассмотреть производную группу $(G')'=G''$, называемую *второй производной группой* группы G. Продолжая этот процесс, мы получим *k-ю производную группу* $G^{(k)}=(G^{(k-1)})'$. Ясно, что $G^{(k)}\leqslant G^{(k-1)}$. Тем самым возникает цепочка вложенных друг в друга подгрупп:

$$\ldots\leqslant G^{(k)}\leqslant G^{(k-1)}\leqslant\ldots\leqslant G''\leqslant G'\leqslant G.$$

Если эта цепочка обрывается на подгруппе, состоящей лишь из тождественной подстановки, то есть если $G^{(m)}=e$ для некоторого числа m, то группа G называется *разрешимой*.

Ясно, что *любая коммутативная группа разрешима*. В частности, разрешима группа S_2. Покажем, что *группа S_3 также разрешима*. Из таблицы 2 следует, что все коммутаторы из S_3 лежат в $\mathbf{Z}_3$, поэтому $S_3'=\mathbf{Z}_3$. Из таблицы 1 видно, что группа $\mathbf{Z}_3$ коммутативна, поэтому $S_3''=\mathbf{Z}_3'=e$.

Далеко не все группы разрешимы. Например, *группы S_n разрешимы лишь для* $n=2$, 3, 4 (это весьма непростое утверждение впервые появилось в мемуаре Галуа).

Теперь мы в состоянии объяснить основную идею теории Галуа. Пусть

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n=0 —$$

произвольное уравнение n-й степени, где $a_0, a_1, \ldots, a_n$ — заданные числа. Еще в конце XVIII века Карл Фридрих Гаусс доказал, что при любых $a_0, a_1, \ldots, a_n$ данное уравнение имеет n комплексных корней $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Мы хотим выяснить, существуют ли формулы, выражающие корни $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ через коэффициенты $a_0, a_1, \ldots, a_n$ с помощью четырех арифметических действий и извлечения корней. Для простоты условимся считать, что a_0, $a_1, \ldots, a_n$ — это рациональные числа и все корни $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ различны. Свяжем с $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ множество $Q(f)$, состоящее из всех чисел вида

$$P(\alpha_1, \ldots, \alpha_n),$$

где P — многочлен от n переменных с рациональными коэффициентами. Рассмотрим преобразования множества $Q(f)$, переводящие сумму чисел в сумму, произведение в произведение и оставляющие на месте рациональные числа. Если β — корень нашего уравнения, то есть

$$a_0\beta^n+a_1\beta^{n-1}+\ldots+a_n=0,$$

а φ — такое преобразование, то

$$\varphi(a_0\beta^n+a_1\beta^{n-1}+\ldots+a_n)=$$
$$=a_0\varphi(\beta)^n+a_1\varphi(\beta)^{n-1}+\ldots+a_n=0.$$

Портрет Галуа, сделанный по памяти его братом Альфредом и опубликованный в 1848 году в журнале «Магазэн питтореск». «Этот портрет,— говорится в заметке «Магазэн питтореск»,— воспроизводит насколько возможно точно выражение лица Эвариста Галуа. Рисунок сделан Альфредом Галуа, который вот уже 16 лет создал настоящий культ памяти своего несчастного брата».

Значит, $\varphi(\beta)$ — корень того же уравнения, то есть *φ просто переставляет корни $\alpha_1,...,\alpha_n$ между собой*, задавая тем самым некоторую подстановку

$$\begin{pmatrix} \alpha_1\alpha_2...\alpha_n \\ \alpha_{i_1}\alpha_{i_2}...\alpha_{i_n} \end{pmatrix}$$

Все такие подстановки образуют некоторую группу, содержащуюся в S_n. Эта группа называется *группой Галуа уравнения* $f(x)=0$ и обозначается $G(f)$.

Основная теорема теории Галуа

Уравнение $f=0$ разрешимо в радикалах тогда и только тогда, когда разрешима его группа Галуа $G(f)$.

В теореме Галуа ценно то, что группу $G(f)$ как правило можно вычислять, не зная корней уравнения $f=0$, только по его коэффициентам. Рассмотрим, например, уравнение $x^3+bx+c=0$ с рациональными коэффициентами, не имеющие рациональных корней. Пусть $\triangle=-4b^3-27c^2$. Если $\triangle$ не является полным квадратом, то $G(f)=S_3$, в противном случае $G(f)=Z_3$. Когда коэффициенты $a_0, a_1,...,a_n$ выбраны более-менее произвольно, то группой Галуа уравнения $f=0$ будет S_n. Поскольку группа S_n не является разрешимой для $n\geqslant5$, то *общее уравнение степени $n\geqslant5$ не разрешимо в радикалах*.

Главное значение работы Галуа состоит даже не в том, что он дал исчерпывающий ответ на вопрос, три века бывший вызовом всем математикам мира, а в созданном им методе, центральное место в котором занимают понятия группы и симметрии. Идеи Галуа оказались плодотворными во всех без исключения областях математики и теоретической физики. От абстрактной алгебры до теории элементарных частиц — таков спектр применения общей идеи симметрии. За всю многовековую историю математики не было иного примера, чтобы столь малая по объему работа оказала такое огромное влияние.

* * *

...Уже светало, когда Эварист Галуа окончил последнее в своей жизни письмо. «Дорогие друзья! Меня вызвали... Я не мог отказаться... Не забывайте меня! Ведь судьба не дала мне прожить столько, чтобы мое имя узнала родина».

«Тяжелые» электроны в металлах

Способность металлов проводить электрический ток связана с наличием в них свободных электронов (электронов проводимости), которые могут перемещаться по кристаллу. Кроме электропроводности, эти электроны определяют многие другие важные свойства металла, такие, например, как теплопроводность, поведение в магнитном поле и т. п.

Входящие в состав металла электроны, конечно же, не являются в полном смысле свободными. Обладая электрическим зарядом, они взаимодействуют с ионами кристаллической решетки и друг с другом. Это взаимодействие сильно влияет на характеристики металлов, где электроны в большой степени теряют свои индивидуальные свойства. Оказывается, тем не менее, что в ряде случаев движение электронов проводимости может быть описано как движение по-настоящему свободных электронов. Для этого электрону в металле приписывают так называемую эффективную массу, которая является важной характеристикой, учитывающей взаимодействия электронов с решеткой и друг с другом.

Физики уже давно описывают свойства металлов, используя понятие эффективной массы, и хорошо к нему привыкли. Отметим, например, что именно эффективная масса определяет ускорение электрона проводимости в электрическом поле.

Обычно — например, в щелочных металлах, олове, меди — эффективная масса электронов близка по величине к массе свободного электрона ($m_e=9{,}1\cdot10^{-31}$ кг), отличаясь от нее самое большее в несколько раз. Однако недавно было обнаружено, что в некоторых соединениях — $CeAl_3$, $CeCu_2Si_2$, UBe_{13} и UPt_3 — эффективная масса электронов почти в тысячу раз больше m_e. Этот факт и позволяет говорить о «тяжелых» электронах.

Естественно, свойства упомянутых соединений очень сильно отличаются от свойств обычных металлов. Например, удельная теплоемкость $CeCu_2Si_2$ и UBe_{13} в несколько сот раз больше величины, ожидаемой для обычного металла. Аналогичная особенность наблюдается и для такой важной характеристики металла, как магнитная восприимчивость, которая отражает способность вещества, помещенного в магнитное поле, *намагничиваться*. Любопытно, что наблюдается связь между величиной эффективной массы электрона и способностью металла выступать в роли катализатора — чем больше эффективная масса, тем активнее проявляет себя металл. Можно надеяться, что это окажется полезным на практике. Однако на этом сюрпризы со стороны металлов с «тяжелыми» электронами не кончаются. Оказалось, что при низких температурах некоторые из них переходят в сверхпроводящее состояние, природа которого, как полагают, может отличаться от обычной сверхпроводимости.

Необычные свойства металлов, связанные с «тяжелыми» электронами, вызвали очень большой интерес у физиков, и в этом направлении сейчас ведутся интенсивные исследования. Пока природа большой эффективной массы электронов в металлах до конца не выяснена, но многие исследователи считают, что она связана с квантовым характером магнитного взаимодействия электронов и тяжелых атомов Ce, U и Pt.

Пока в физике металлов с «тяжелыми» электронами вопросов намного больше, чем ответов. Исследования продолжаются.

А. Б.

А что будет, если...?

Д. Л. ТАРАСОВ,
кандидат физико-математических наук
Л. В. ТАРАСОВ

«А что будет, если ...?» Вопросы такого типа могут быть самыми различными, за словом «если» могут стоять самые разные предположения, в том числе — и относительно каких-то физических процессов, явлений. Всякий раз такие вопросы побуждают нас рассматривать какую-нибудь физическую ситуацию и тем самым помогают лучше понять сущность тех или иных явлений, роль и область действия тех или иных физических закономерностей.

Что будет, если скорость света во всех прозрачных средах вдруг станет равной скорости света в вакууме? Может быть, сегодня этот вопрос и покажется надуманным. Но, как мы увидим, отвечая на него, нам придется разобраться во многих знакомых и, казалось бы, очевидных вещах. А кроме того, лет двести назад этот вопрос мог возникнуть, и притом вполне серьезно.

Вспомним: в XVII—XVIII веках господствовал чисто механический подход к оптическим явлениям. Одни ученые придерживались выдвинутой Ньютоном «теории истечения», согласно которой свет рассматривался как поток быстро летящих мелких «частичек». Другие, следуя Гюйгенсу, рассматривали свет как распространение упругих волн в особой среде — эфире,— заполняющей все мировое пространство, включая и прозрачные тела. Для объяснения наблюдаемых явлений приходилось наделять эфир свойствами удивительными и порой необъяснимыми. Так, пришлось предположить, что скорость «упругих» световых волн в эфире зависит от того, какие именно тела «заполняет» эфир. Это было не вполне понятно; на первый взгляд казалось, что скорость распространения упругих возмущений в вездесущем эфире должна быть везде одной и той же. Вот тогда-то и мог возникнуть вопрос: а не является ли скорость света и в самом деле одной и той же во всех телах и в вакууме?

Предположим, что это действительно так, и посмотрим, к каким «последствиям» приведет это предположение. Разумеется, мы будем пользоваться нашими знаниями о действительной природе оптических явлений, теорией, согласующейся с повседневным опытом. Мы знаем, что скорость v света в какой-либо среде всегда меньше скорости света c в вакууме. Всегда $c>v$. Отношение c/v есть показатель преломления света n для данной среды.

Предположим, что скорость света во всех прозрачных средах сделалась равной скорости света в вакууме: $v=c$. Следовательно, для всех сред теперь $n=1$. Это означает, в частности, что исчезло преломление световых лучей на границе сред. Проходя, например, из воздуха в воду, световой луч не будет теперь изменять своего направления. Ложка в стакане с водой не будет казаться нам «сломанной», а расстояние до монетки на дне бассейна не будет представ-

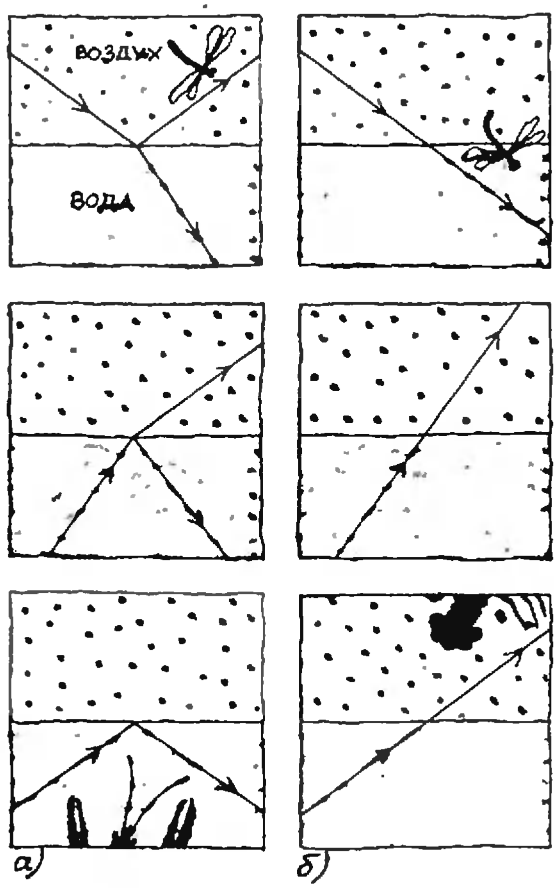


Рис. 1. Световой луч на границе двух сред в обычной ситуации (а) и в новой ситуации (б).

ляться нам меньшим, чем оно есть в действительности. Исчезнет и явление полного внутреннего отражения. Все это хорошо видно на рисунке 1, где сопоставляются две ситуации — обычная и новая. В новой ситуации световой луч попросту «не замечает» границы между средами; в оптическом смысле эта граница не существует.

Такая «метаморфоза» неизбежно приведет ко многим потерям. Окажутся бесполезными все оптические линзовые приборы, от обычных очков до сложнейших микроскопов,— ведь линзы потеряют способность фокусировать или дефокусировать световые лучи. Перестанут действовать волоконно-оптические линии связи, поскольку свет «удерживался» внутри прозрачного волокна за счет полного внутреннего отражения лучей от боковой поверхности волокна.

Произойдут изменения и в явлениях, наблюдаемых в природе, прежде всего в оптических явлениях, происходящих в земной атмосфере. Как известно, атмосфера является оптически неоднородной средой: ее показатель преломления изменяется с высотой и, кроме того, зависит от температуры, влажности, наличия примесей, перемещений слоев воздуха; в частности, показатель преломления воздуха тем меньше, чем меньше плотность воздуха. Поэтому световые

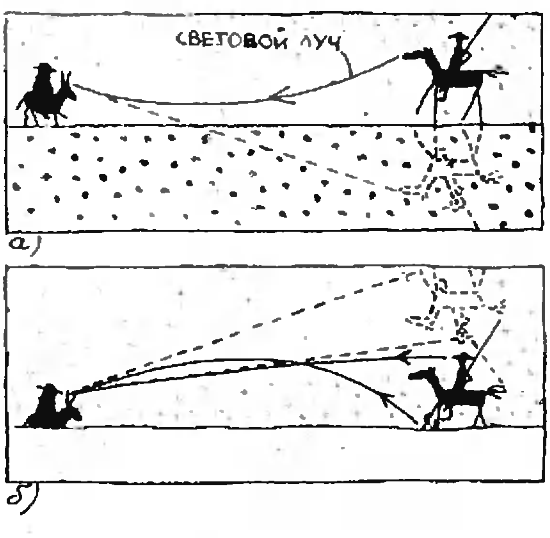


Рис. 2. Возникновение миража. а) У самой поверхности земли воздух достаточно нагрет, так что его плотность, а значит и показатель преломления, меньше, чем в более высоких слоях,— луч изогнут выпуклостью вниз. б) В более высоких слоях воздух теплее, показатель преломления меньше — луч изгибается выпуклостью вверх.

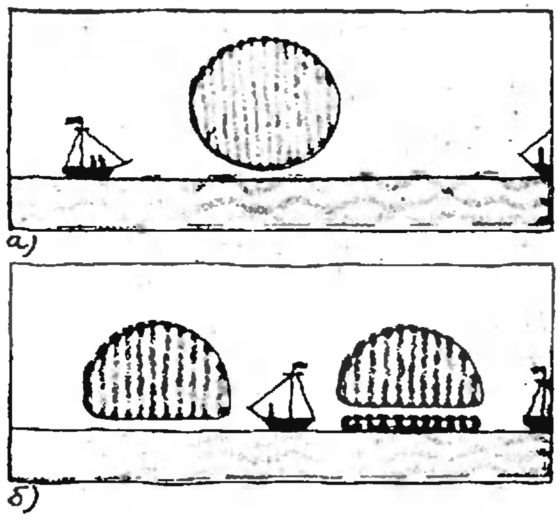


Рис. 3. «Сплюснутое» Солнце на закате (а), «слепая полоса» на диске заходящего Солнца (б) — следствие рефракции света в земной атмосфере.

лучи распространяются в земной атмосфере не по прямым, а по плавно изогнутым линиям (это называют рефракцией света в атмосфере). Нетрудно показать, что световой луч изгибается таким образом, что его траектория оказывается всегда обращенной выпуклостью в ту сторону, где показатель преломления меньше. Этим объясняется возникновение миражей (рисунок 2). С рефракцией света в земной атмосфере связаны такие явления, наблюдаемые при заходе Солнца, как небольшая сплюснутость солнечного диска, появление в отдельных случаях горизонтальной «слепой полосы», перерезающей солнечный диск (рисунок 3); мерцание звезд — тоже результат рефракции.

В новой ситуации, рассматриваемой нами, атмосфера станет оптически однородной средой — ведь независимо от изменений плотности воздуха показатель преломления для него будет одним и тем же во всех точках пространства: он будет равен единице. Поэтому исчезнет рефракция света в атмосфере, а вместе с ней исчезнут миражи, мерцание звезд, своеобразие солнечных закатов.

Мы знаем, что проходя сквозь обычную трехгранную призму, солнечный луч разлагается на цвета радуги. Это связано с тем, что показатель преломления света зависит не только от выбора среды, но и от длины волны света (это называют дисперсией). Наибольшим показателем преломления характеризуются фиолетовые лучи, а наименьшим — красные.

Так как теперь показатель преломления всегда один и тот же — а это означает, что он не зависит ни от выбора среды, ни от длины волны света, ни от каких-либо иных факторов,— исчезнет дисперсия, никакого разложения на цвета в призме мы теперь наблюдать не будем (рисунок 4). Значит, перестанут работать почти все спектрометры и спектрографы. Мы не сможем никогда любоваться радугой на небе...

Итак, в новой ситуации мир стал заметно беднее: исчезло преломление лучей на границе сред, исчезла рефракция света в атмосфере, исчезла дисперсия. А что будет с отражением? С обычным отражением света от поверхности прозрачной среды? Оно тоже исчезнет! (Это можно было усмотреть уже из рисунка 1, *б*). Картина получается впечатляющей. Находясь на берегу озера, мы теперь не увидим в воде отражений деревьев, кустов, облаков, не увидим ночью лунной дорожки на воде. Мы вообще не увидим ни лужи, ни реки, ни моря — мы будем видеть только дно! Согласитесь, это будет очень существенным изменением в пейзаже. Но это еще не все, произойдут еще более впечатляющие изменения.

Почему небо голубое? Все дело в рассеянии света в земной атмосфере. Интенсивность рассеянного света обратно пропорциональна λ^4, где λ — длина волны света. Значит, в рассеянном свете большей интенсивностью обладает часть спектра, близкая к его фиолетовому концу. В результате спектр рассеянного света оказывается как бы сдвинутым в сторону более коротких волн — вместо белого света получается голубой. Глядя на небо, мы видим рассеянный атмосферой свет, и небо — голубое. Когда же мы глядим на заходящее Солнце или просто в направлении Солнца, то воспринимаем в основном не рассеянный свет, а прямые солнечные лучи, прошедшие через толстый слой атмосферы без рассеяния. Спектр такого света смещен в сторону более длинных волн. Поэтому заходящее Солнце красное, а небо вблизи него «окрашено» в оранжевые и красные тона.

А теперь подумаем, что будет со всем этим в той новой ситуации,

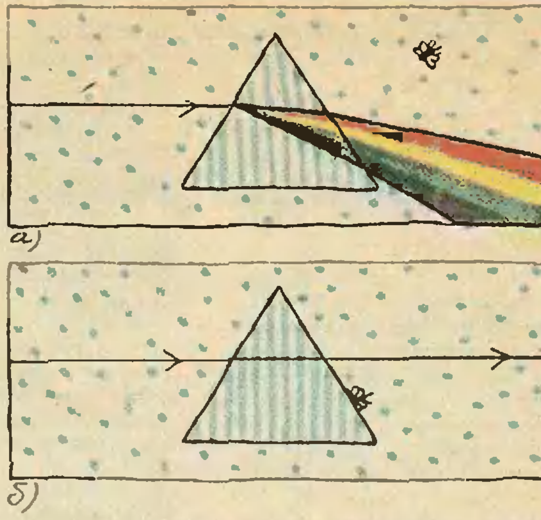


Рис. 4. «Радуга», появляющаяся после прохождения солнечного луча сквозь призму (а),— результат дисперсии. В новой ситуации (б) дисперсия отсутствует.

какую мы обсуждаем. На чем именно рассеивается свет? На изменениях плотности воздуха, обусловленных беспорядочными движениями молекул. Эти изменения случайны: плотность хаотически меняется от точки к точке и от одного момента времени к другому. Рассеяние света обусловлено случайными изменениями показателя преломления воздуха, которые связаны с изменениями его плотности. Иными словами, свет рассеивается на оптических неоднородностях атмосферы, обусловленных тепловым движением ее молекул. В нашей новой ситуации изменения плотности воздуха не приводят к появлению оптических неоднородностей. Значит, исчезнет рассеяние света в атмосфере — мы будем видеть черное звездное небо, а на нем яркий белый диск Солнца.

А собственно говоря, будем ли мы вообще что-нибудь видеть? Ведь как только скорость света в среде станет равной скорости света в вакууме, хрусталик нашего глаза — эта созданная самой природой линза — перестанет выполнять свои функции. Глаз превратится в подобие простой камеры-обскуры. Сможет ли он видеть? Не будет ли возникшая при этом «дальнозоркость» чрезмерно огромной?

Вот к каким неочевидным ситуациям привел нас всего один вопрос — что будет, если скорость света станет всюду равной скорости света в вакууме.

К 175-летию закона Авогадро

Итальянский физик Амедео Авогадро*) (1776—1856) происходил из семьи, все мужчины которой, начиная с XII века, неизменно становились адвокатами. Полагают даже, что сама фамилия Авогадро возникла из avvocato (по-итальянски — адвокат). Но будущий ученый, в двадцать лет получивший диплом доктора права, не слишком долго сохранял верность семейной традиции. Еще в юношеские годы у него пробудился живой интерес к точным наукам, а с 1800 года все свободное время он стал отдавать изучению физики и математики.

Через несколько лет Авогадро уже автор двух научных работ и член-корреспондент Туринской академии наук; в 1806 году он, наконец, оставляет адвокатскую практику и становится преподавателем физики и математики. Бывший юрист продолжает упорно штудировать специальную литературу, растет число его собственных научных работ. В ученых кругах Италии имя Авогадро получает широкую известность. В 1819 году его избирают действительным членом Туринской академии, а годом позже королевским указом назначают профессором первой в Италии кафедры высшей (по-современному — теоретической) физики в Туринском университете.

Человек проницательного ума, энциклопедических знаний и редкой скромности, Авогадро у себя на родине пользовался высоким научным авторитетом. Но за пределами Италии его исследования никакого отклика не находили. Широкое признание пришло лишь спустя четыре года после смерти ученого, когда в 1860 году на первом международном химическом конгрессе в Германии его соотечественник химик С. Канниццаро сумел донести до собравшихся содержание одной из статей Авогадро, написанной еще в 1811 году. В этой статье был сформулирован знаменитый закон Авогадро:

В равных объемах различных газов при одинаковых температуре и давлении содержится равное число атомов или молекул.

К этому важнейшему выводу Авогадро пришел, анализируя опубликованные в 1808 году экспериментальные результаты французского физика Ж. Л. Гей-Люссака (1778—1850), изучавшего объемные соотношения в реакциях между газами и установившего, что объемы вступающих в реакцию газов и газообразных продуктов реакции относятся как небольшие целые числа.

За десять лет до Авогадро гипотезу равенства числа частиц в равных объемах всех газов рассматривал основоположник химической атомистики англичанин Дж. Дальтон (1766—1844). Однако он вынужден был отвергнуть эту, по его словам, «туманную» идею как противоречившую разработанным им схемам ряда химических реакций.

Задачу, в которой запутались Дальтон и Гей-Люссак, а вместе с ними и множество других крупных ученых, красиво и просто решил тогда еще никому неизвестный Авогадро. Рассуждал он следующим образом. Дальтон, несомненно, прав, утверждая, что элементарный акт химической реакции состоит в перегруппировке атомов, этих реально существующих дискретных порций материи, из которых состоят все вещества. А коль скоро это так, то из открытия Гей-Люссака с необходимостью следует, что между объемами газов и числом образующих их частиц должно существовать какое-то очень нехитрое соотношение. Самое простое — предположить, что равные объемы всех газов при одинаковых внешних условиях содержат равное число частиц. Но в таком случае возникает противоречие между общепринятыми схемами газовых реакций и данными измерений. Действительно, реакцию образования водяного пара из водорода и кислорода представляли тогда так: $2H+O=H_2O$, то есть из двух атомов водорода и одного атома кислорода образуется одна молекула воды. Значит, если считать, что равные числа частиц занимают равные объемы, отношение соответствующих объемов в этой реакции должно быть 2:1:1, а не 2:1:2, как установил Гей-Люссак.

Размышления над этой и несколькими аналогичными неувязками привели Авогадро к выводу, что представления химиков о газовых реакциях неточны. Так, в реакции образования водяного пара соединяются не атомы, а двухатомные молекулы водорода и кислорода, то есть реакция должна идти по схеме: $2H_2+O_2=2H_2O$, в точности отвечающей найденному отношению объемов 2:1:2. Подобным же образом ученый легко привел в строгое соответствие с экспериментальными данными и ряд других схем газовых реакций.

Казалось бы, «простейшее» предположение Авогадро, как полностью оправдавшееся, должно было быстро получить признание в качестве нового фундаментального закона природы, тем более, что ученый опубликовал свою статью в известном французском научном журнале. Но, как уже говорилось, это произошло лишь полвека спустя. В чем причина столь длительной задержки? Вероятно, частично она объясняется тем, что Авогадро как человек, лишенный честолюбия, почти ничего не сделал для пропаганды своего открытия, устранился от борьбы за его признание зарубежными коллегами. Но главное все-таки в другом: тогда научный мир еще не был готов для восприятия выводов Авогадро, поскольку в отношении исходных понятий атомно-молекулярной теории царила полная неразбериха. Отсутствовало элементарное взаимопонимание: то, что один называл атомом, другой называл молекулой, а третий — частицей. Физики представляли себе атомы и молекулы совсем не так, как химики. Многие вообще не верили в их реальное существование и считали их лишь условными символами. Собственно

(Окончание см. на с. 20)

*) Его полное имя Лоренцо Романо Амедео Карло Авогадро ди Куарегуа э ди Каррето.

Наблюдения над туманом

Доктор физико-математических наук
А. А. БОРОВОЙ

Присматривались ли вы к тому, как появляется над рекой вечерний туман? Он возникает не сразу, а сначала сгущается над водоворотами и перекатами. Отдельные легкие облачка в лунном свете напоминают женские фигуры в белых одеждах. И начинаешь понимать наших предков, создавших так много легенд о русалках.

С описанием этого иногда удивительно красивого, а чаще тревожного и загадочного природного явления мы встречаемся и на страницах произведений художественной литературы. На полях этой и следующих страниц приведено несколько прозаических и стихотворных цитат, в которых описывается туман. Постарайтесь догадаться, кто их авторы.

Как часто удается любоваться туманом, зависит от особенностей местности. Например, для жителей Ньюфаундленда, острова, расположенного у берегов Канады в месте, где теплое течение Гольфстрим сталкивается с холодным Лабрадорским течением, туманы — постоянные гости. Третью часть года, включая практически все летние дни, остров покрыт густой дымкой. Наверное, даже самое красивое описание тумана вряд ли вызовет восхищение у жителей Ньюфаундленда. Настоящая «страна туманов» — Англия, «туманный Альбион». У нас в стране особенно богаты туманными днями побережья северных морей — Балтийского, Охотского, Кольский полуостров.

Если там, где вы живете, природные туманы — редкость, не забудьте, что у себя дома их можно видеть буквально на каждом шагу. Белое облачко, появляющееся из носика кипящего чайника,— это туман. В обиходе мы называем его паром, но это неверно, поскольку пар воды представляет собой бесцветный газ. Если быстро открыть бутылку с газированной водой, то над горлышком в первый момент появится дымок — это тоже туман. На улице в морозный день туман клубится над открытой водной поверхностью, над прорубями или полыньями, врывается в комнату через открытую форточку, возникает при дыхании (опять-таки мы привыкли говорить — «пар от дыхания»).

Образование тумана связано с тем, что при понижении температуры воздуха водяные пары,

Откуда эти строки?

ТУМАНЪ м. (тьма, тéмень) густой паръ, водяные пары въ низшихъ слояхъ воздуха, на поверхности землй; омраченный парáми воздухъ.

«Дитя, что ко мне ты так
робко прильнул?» —
«Родимый, лесной царь
в глаза мне сверкнул.
Он в темной короне, с густой
бородой». —
«О нет, то белеет туман над
водой».

Белая волокнистая пелена, затянувшая почти все болото, с каждой минутой приближалась к дому ...
Вот белесые кольца показались с обеих сторон дома и медленно слились в плотный вал, и верхний этаж с крышей всплыл над ним точно волшебный корабль на волнах призрачного моря.

Лишь высших гор до половины
Туманы покрывают скат,
Как бы воздушные руины
Волшебством созданных
палат.

Внешность перемены была поразительна. Секунду назад мы мчались в ярких солнечных лучах, над нами было ясное небо, и далеко-далеко до самого горизонта море шумело и катило свои волны, а за нами бешено гнался корабль, изрыгая дым, пламя и чугунные ядра. И вдруг, во мгновение ока, солнце точно загасили, небо исчезло, даже верхушки мачт пропали из виду, и на глаза наши, словно их заволокло слезами, опустилась серая пелена. Сырая мгла стояла вокруг нас, как стена дождя. Волосы, одежда — все покрылось алмазными блестками.

Сегодня все вокруг заснуло,
Как дымкой твердь заволокло,
И в полумраке затонуло
Воды игривое стекло.

содержащиеся в нем, в какой-то момент становятся насыщенными и при дальнейшем охлаждении начинают конденсироваться. И выделяют избыток влаги в виде мельчайших капель на центрах конденсации — пылинках, частицах дыма, ионах газа и т. п. Когда капли появляются в воздухе, мы говорим о тумане. А капли на поверхности земли, на листьях и траве называем росой.

Чтобы представить себе, насколько изменяется содержание водяного пара в воздухе при изменении температуры, приведем такие цифры:

масса насыщенного водяного пара в 1 м^3 воздуха при 30 °С составляет 30 г;

при охлаждении воздуха до 10 °С масса насыщенного пара уменьшается до 10 г/м^3;

значит, в каждом кубометре воздуха 20 г воды должны выделиться в виде капель тумана или росы.

Размер капель, составляющих туман, вы можете определить следующим образом. Подержите в тумане стеклышко, смазанное вазелином, а потом рассмотрите под микроскопом оставшиеся на нем капли влаги. Микроскоп необходим, поскольку даже самые крупные капли достигают размеров всего лишь в десятки микрон, их диаметр почти в сто раз меньше толщины спички.

Обычно туманы не долговечны. Мелкие капли сливаются в более крупные и опускаются вниз — туман дождем выпадает на землю. Но может случиться и так, что в теплом потоке воздуха капли тумана испарятся и туман рассеется.

Все это можно наблюдать на простом опыте, для которого потребуется кофейник, сковорода и небольшой кусок резиновой трубки. Плотно вставим трубку в носик кофейника, нальем в него воду и поставим на плиту. Когда вода закипит, из трубки начнет вырываться белая струя водяного тумана. Поднесем (с помощью пинцета) конец трубки к холодной сковороде, стоящей на соседней конфорке. Туман будет подниматься над ней и частично оседать каплями на холодную поверхность металла. Но если сковороду разогреть — туман пропадет. В потоке нагретого воздуха плотность водяного пара становится ниже насыщенной, и капли воды не образуются (или испаряются).

«Граждане, рейс Москва — Воркута задерживается вылетом на два часа». К сожалению, объявления такого рода нередко можно услышать в аэропорту. Чаще всего задержка происходит как раз из-за тумана. Именно он мешает принимать самолеты, идущие на посадку, и мешает их взлету. Как с этим бороться?

Сначала инженеры предложили почти очевидный способ, который так хорошо «работал» в опыте со сковородой. Дело было во время войны. Английские летчики должны были отражать налеты фашистов. Но Англия — страна туманов, и летчик, вылетая с аэродрома, далеко не был уверен, что ему удастся совершить посадку в ясную погоду. И вот на шести английских аэродромах вдоль всей посадочной полосы запылали огромные факелы. Они подогревали воздух, капли тумана испарялись, и видимость повышалась во много раз — вплоть до километра.

Но способ этот оказался дорогим и неэффективным. Дело в том, что при сгорании нефть сама образует много водяных паров, они непрерывно пополняют «резервы» тумана, и факелам в основном приходилось бороться самим с собой. В результате на каждом аэродроме за секунду сгорала целая бочка нефти. Если для небольших аэродромов это было уже достаточно накладно, то для современных взлетных полос потребовалась бы целая река нефти. От подогрева воздуха пришлось отказаться.

Более перспективным оказалось рассеяние над аэродромом веществ, поглощающих влагу, например тончайшего порошка хлористого кальция. Его частицы собирают капли тумана в более крупные и выпадают на землю дождем. Влажность воздуха падает, и туман рассеивается.

Раз речь зашла о туманах и самолетах, мы хотели бы упомянуть еще о двух связывающих их фактах.

Каждый из вас, наверное, не раз замечал в небе белый след от летящего самолета. Это — туман, образующийся из паров воды, поставщиком которых служит сгорающее топливо. Горячий выхлопной газ, насыщенный водяными парами, попадает в холодную атмосферу и образует туман.

Куда более страшный «туманный след» может тянуться за самолетом, потерпевшим аварию. Это — след из горючего, которое выброшено в воздушный поток и распылено им в мельчайшие капли. Возникший огонь может распространяться по такому следу со скоростью в десятки метров в секунду, так что никакие пожарные средства не сумеют подоспеть на помощь. В связи с этим возникла проблема введения в топливо веществ, существенно уменьшающих горючесть такого тумана. И такие работы ведутся.

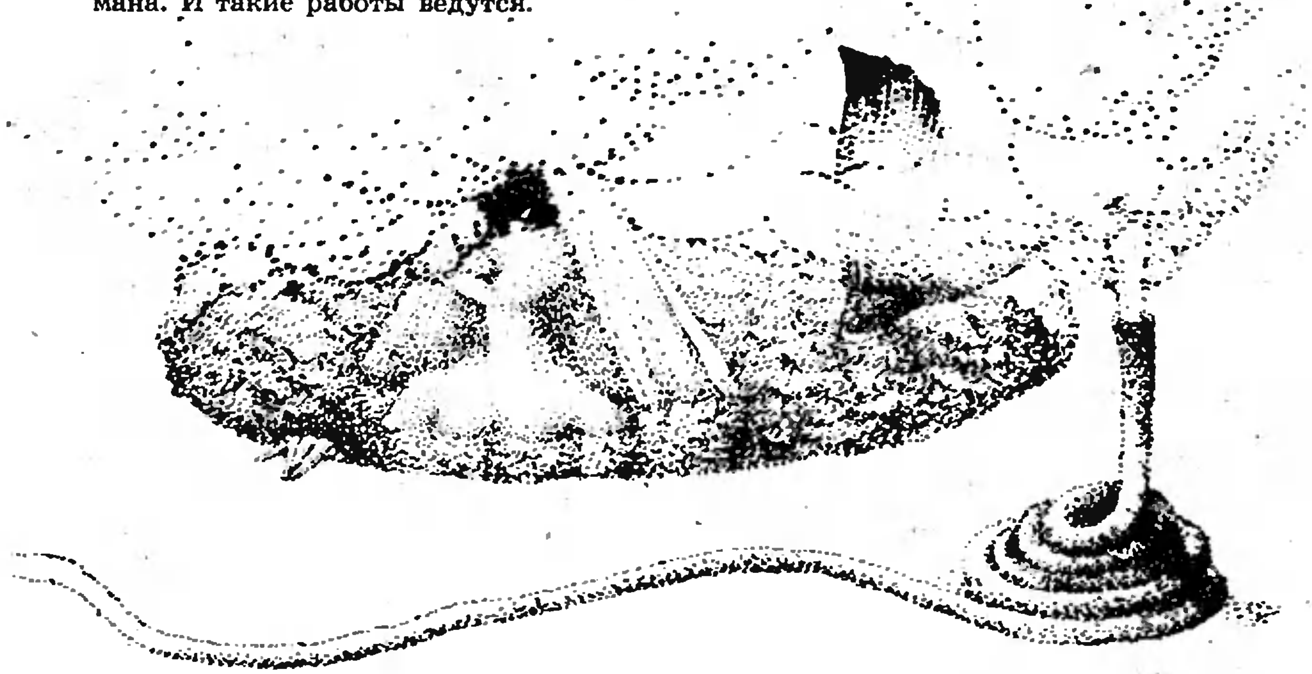
Какое-то странное, упоительное сияние примешалось к блеску месяца. Никогда еще не случалось ему видеть подобного. Серебряный туман пал на окрестность. Запах от цветущих яблонь и ночных цветов лился по всей земле.

Сентябрь холодный бушевал,
С деревьев ржавый лист
валился,
День потухающий дымился,
Сходила ночь, туман вставал.

Туча кружево в роще связала,
Закурился пахучий туман.

Как грустна вечерняя земля!
Как таинственны туманы над болотами.

Ее глаза — как два тумана,
Полуулыбка, полуплач...



Математика 8

Публикуемая заметка адресована восьмиклассникам, но может быть полезна также учащимся девятых и десятых классов.

Геометрические преобразования в планиметрических задачах

Поворот, осевая и центральная симметрии, параллельный перенос, гомотетия — все эти преобразования плоскости часто помогают устанавливать многие интересные и важные свойства геометрических фигур, более полно раскрывать содержание предмета.

В этой статье мы рассмотрим несколько задач планиметрии, решение которых с помощью преобразований плоскости существенно проще других традиционных методов, и немного коснемся вопроса о композиции преобразований.

Задача 1. *Пусть O — центр окружности, описанной около треугольника ABC, M — точка пересечения его медиан, H — точка пересечения его высот. Покажите, что точки O, M, H лежат на одной прямой.*

Решение. На рисунке 1 точки B_1 и C_1 — середины сторон AC и AB треугольника ABC, BB_2 и CC_2 — его высоты.

Рассмотрим гомотетию с центром M и коэффициентом $k=-2$. При этой гомотетии точки B_1 и C_1 отобразятся соответственно в точки B и C. Поскольку при гомотетии сохраняются величины углов, отрезок B_1O перейдет в отрезок, лежащий на прямой BB_2, а отрезок C_1O перейдет в отрезок, лежащий на прямой CC_2, так что точка O пересечения прямых B_1O и C_1O перейдет в точку H пересечения высот BB_2 и CC_2. Отсюда следует, что точки O, M, H лежат на одной прямой.

Задача 2. *Даны две окружности разных радиусов, пересекающиеся в точке A.* а) *Покажите, что существуют ровно две различные точки M и N такие, что данные окружности гомотетичны с центром M и гомотетичны с центром N.* б) *Покажите, что $\angle MAN=90°$.*

Решение. а) Пусть O_1 и O_2 — центры наших окружностей и PQ и RS — их диаметры, перпендикулярные прямой O_1O_2. Гомотетия должна переводить PQ в RS; значит, она либо переводит P в R и Q в S, либо переводит P в S и Q в R. В первом случае центр гомотетии есть точка пересечения прямых PR и QS; во втором случае — точка пересечения прямых PS и QR. б) При гомотетии двух окружностей с центром M точка O_1 есть образ точки O_2 (рис. 2); она же есть образ точки O_2 и при гомотетии с центром N. Точка A при гомотетии с центром M переходит в точку A_1, а при гомотетии с центром N она переходит в точку A_2. По свойству гомотетии прямые O_1A_1 и O_2A, а также O_1A_2 и O_2A параллельны. Из этого следует, что точка O_1 лежит на прямой A_1A_2. Поэтому $\angle A_1AA_2=90°$, откуда и $\angle MAN=90°$.

Задача 3. *На окружности даны три точки: M, N и K. Впишите в эту окружность треугольник ABC так, чтобы прямые AM, BN и CK были биссектрисами углов A, B и C соответственно.*

Решение. Пусть ABC — искомый треугольник. Проведем через точки M, N, K касательные к данной окружности (рис. 3) и рассмотрим треугольник $A_1B_1C_1$, получающийся в их пересечении.

Поскольку равны дуги AK и KB, BM и MC, AN и NC, попарно параллельны прямые A_1B_1 и AB, B_1C_1 и

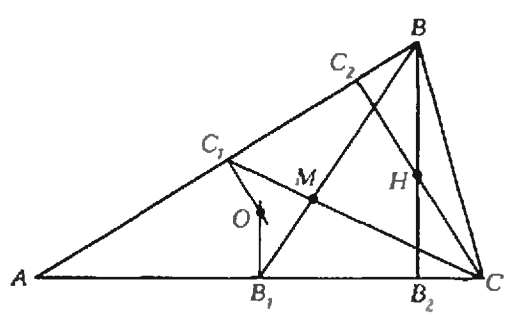


Рис. 1.

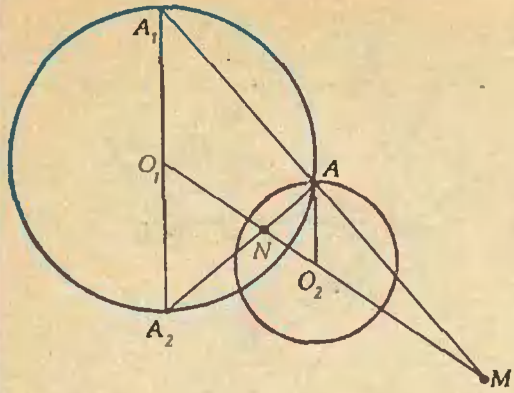


Рис. 2.

BC, A_1C_1 и AC. Таким образом, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ гомотетичны, и по свойству гомотетии биссектрисы одного из них параллельны биссектрисам другого.

Отсюда вытекает нужное построение.

Через точки M, N, K проводим касательные к окружности. При их пересечении образуется треугольник $A_1B_1C_1$. Проводим в нем биссектрисы — прямые A_1M_1, B_1N_1, C_1K_1 на рисунке 3. Через точки M, N, K проводим прямые, параллельные A_1M_1, B_1N_1 и C_1K_1 соответственно. Эти прямые пересекут окружность в трех нужных точках A, B, C.

Задача 4. *В окружность вписан четырехугольник $ABCD$. Докажите, что прямые, проведенные через середины его сторон перпендикулярно соответствующим противоположным сторонам, пересекаются в одной точке.*

Решение. Пусть точки M, N, F, K — середины сторон AB, BC, CD и AD соответственно (рис. 4). Прямые, проведенные через точки M, N, F, K перпендикулярно соответственно сторонам AB, BC, CD и AD, пересекаются в центре данной окружности — точке O. Ясно, что четырехугольник $MNFK$ — параллелограмм. Пусть P — его центр симметрии.

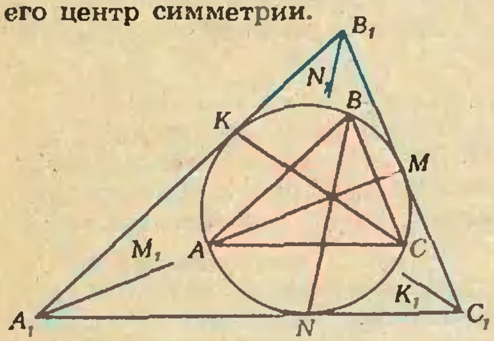


Рис. 3.

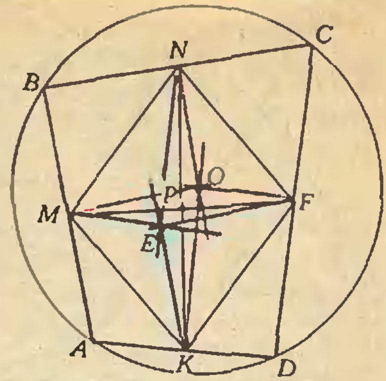


Рис. 4.

При центральной симметрии с центром в точке P точки F, M, K, N симметричны соответственно точкам M, F, N, K. Пусть a, b, c, d — прямые, проходящие через точки M, N, F, K соответственно, перпендикулярные сторонам CD, AD, AB, BC. Очевидно, что при центральной симметрии с центром P прямые a, b, c, d являются образами прямых OF, OK, OM, ON соответственно (при центральной симметрии прямая переходит в параллельную ей прямую). Отсюда следует утверждение задачи: прямые a, b, c, d пересекаются в одной точке E — образе точки O при центральной симметрии с центром в P.

Задача 5. *Продолжения боковых сторон AD и BC равнобедренной трапеции $ABCD$ пересекаются в точке L. Докажите, что окружности, описанные около треугольников ACL и BDL, пересекаются в центре окружности, описанной около данной трапеции.*

Решение. Треугольник ABL — равнобедренный. Его высота LM является его осью симметрии (рис. 5). Красная окружность, проходящая через точки A, C, L, есть отображение синей окружности, проходящей через точки B, D L при симметрии относительно оси LM. При этом

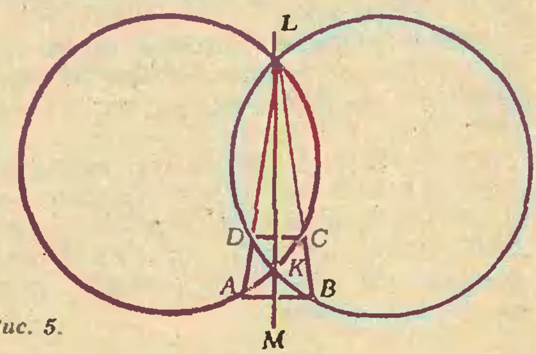


Рис. 5.

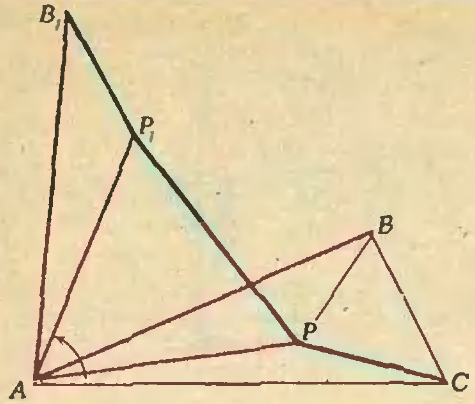


Рис. 6.

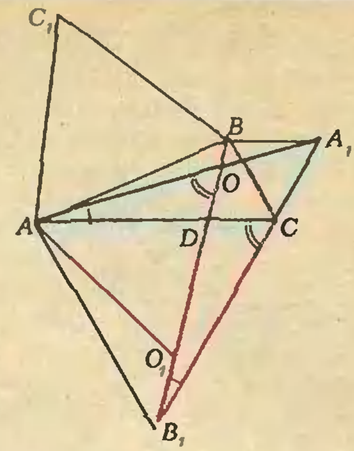


Рис. 7.

точка K пересечения синей окружности с осью симметрии LM отображается на себя — точку пересечения красной окружности с осью симметрии.

Поэтому при данной симметрии дуга KC симметрична дуге KD, а дуга AK симметрична дуге KB. Кроме того, дуга AK равна дуге KC, откуда следует равенство этих четырех дуг. Поэтому равны и хорды, стягивающие эти дуги, так что точка K является центром окружности, описанной около трапеции $ABCD$.

З а д а ч а 6. *Найдите точку, сумма расстояний которой от вершин данного треугольника была бы минимальной.*

Р е ш е н и е. Пусть ABC — данный треугольник, P — произвольная точка плоскости. Повернем треугольник ABC вокруг точки A на $60°$ (рис. 6). Пусть точки B_1 и P_1 — образы точек B и P при этом повороте. Тогда $B_1P_1=BP$, $AP_1=AP$, и следовательно,

$$l=AP+BP+CP=AP_1+B_1P_1+CP= \\ =B_1P_1+P_1P+CP.$$

Ясно, что l будет минимальным, если точки P_1 и P будут лежать на прямой B_1C. Легко подсчитать, что в этом случае $\angle APC=\angle APB=\angle BPC=120°$.

Таким образом, искомая точка — это точка, из которой стороны данного треугольника видны под углом $120°$.

З а д а ч а 7. *На сторонах треугольника ABC во внешнюю сторону построены правильные треугольники ABC_1, BCA_1 и ACB_1. Докажите, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке.*

Р е ш е н и е. Пусть O — точка пересечения прямых AA_1 и BB_1. Повернем плоскость треугольника ABC вокруг точки C на $60°$ против часовой стрелки. При этом повороте (рис. 7) треугольник CBB_1 есть образ треугольника CAA_1. Поэтому углы A_1AC и BB_1C равны, откуда и углы AOB_1 и ACB_1 равны, то есть $\angle AOB_1=60°$.

Отложим теперь на прямой BB_1 от точки O отрезок $OO_1=AO$ и повернем плоскость вокруг точки A на $60°$ так, что точки B, B_1, O_1 перейдут в точки C_1, C, O соответственно. Мы получили, что при этом повороте прямая BB_1 переходит в прямую CC_1, содержащую точку O.

З а м е ч а н и е. Точка O лежит на окружности, описанной около треугольника AB_1C, так что $\angle AOC=120°$. Аналогично $\angle AOB=\angle BOC=120°$. Итак, все стороны треугольника ABC видны из точки O под углом $120°$ (сравните этот результат с решением задачи 6).

Докажем теперь три небольшие, но очень важные теоремы о *композициях* различных преобразований.

Т е о р е м а 1. *Последовательная симметрия относительно двух пересекающихся осей есть поворот вокруг точки O пересечения этих осей на угол, вдвое больший угла между ними.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть M — произвольная точка, отличная от точки O, M_1 — точка, симметричная M относительно оси l, M_2 — точка, симметричная M_1 относительно оси k, α — угол между вектором $\overrightarrow{OM}$ и осью l, φ — угол между осями k и l. Предположим, что точка M_1 лежит в н у т р и угла, равного φ (другие слу-

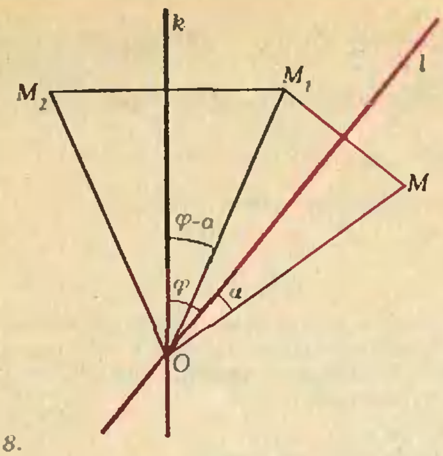


Рис. 8.

чаи аналогичны). Тогда (см. рисунок 8) угол между векторами $\overrightarrow{OM}$ и $\overrightarrow{OM_1}$ равен 2α, угол между вектором $\overrightarrow{OM_1}$ и осью k равен $\varphi-\alpha$, угол между векторами $\overrightarrow{OM_1}$ и $\overrightarrow{OM_2}$ равен $2(\varphi-\alpha)$ и угол между векторами $\overrightarrow{OM}$ и $\overrightarrow{OM_2}$ равен $2\alpha+2(\varphi-\alpha)=2\varphi$. Так как, очевидно, $|\overrightarrow{OM}| = |\overrightarrow{OM_1}| = |\overrightarrow{OM_2}|$, наше преобразование действительно есть поворот на угол 2φ.

Теорема 2. *Последовательная симметрия относительно двух различных центров симметрии есть параллельный перенос.*

Доказательство. Пусть O_1 и O_2 — центры симметрии и M — произвольная точка плоскости. Пусть, далее, точка M_1 симметрична точке M относительно центра O_1 и точка M_2 симметрична точке M_1 относительно центра O_2. Тогда O_1O_2 есть средняя линия треугольника MM_1M_2 (рис. 9), и потому $\overrightarrow{MM_2} = 2\overrightarrow{O_1O_2}$. Мы видим, что наше преобразование смещает произвольную точку на один и тот же вектор $2\overrightarrow{O_1O_2}$; значит, оно является параллельным переносом.

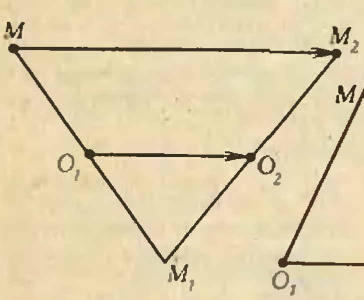


Рис. 9.

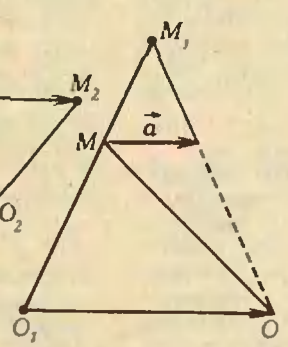


Рис. 10.

Теорема 3. *Последовательное выполнение параллельного переноса и гомотетии есть гомотетия с тем же коэффициентом.*

Доказательство. Пусть вектор $\vec{a}$ задает параллельный перенос, O — центр гомотетии, k — коэффициент гомотетии. Произвольная точка M при составном преобразовании переходит в точку M_1 такую, что (см. рисунок 10)

$$\overrightarrow{MM_1} = \vec{a} + (k-1)(\overrightarrow{OM}+\vec{a}) = (k-1)\overrightarrow{OM} + k\vec{a}.$$

Обозначим через O_1 такую точку, что

$$\overrightarrow{O_1O} = \frac{k\vec{a}}{k-1}$$

(у нас $k\neq 1$). Тогда

$$\overrightarrow{MM_1} = (k-1)\overrightarrow{OM} + (k-1)\frac{k\vec{a}}{k-1} = (k-1)\overrightarrow{OM}+(k-1)\overrightarrow{O_1O}=(k-1)\overrightarrow{O_1M},$$

$$\overrightarrow{O_1M_1}=\overrightarrow{O_1M}+\overrightarrow{MM_1}=k\overrightarrow{O_1M}.$$

То есть наше преобразование есть гомотетия с центром O_1 и коэффициентом k.

Следствие 1. *Последовательное применение параллельного переноса и центральной симметрии есть центральная симметрия.*

Следствие 2. *Нечетное число последовательных центральных симметрий есть центральная симметрия.*

Мы предлагаем читателям, используя доказанные утверждения, решить самостоятельно две задачи на композиции преобразований.

Задача 8. *Найдите угол между осями симметрии a и b, если результат последовательных симметрий относительно осей a, b, a совпадает с результатом последовательных симметрий относительно осей b, a, b.*

Задача 9. *Докажите, что если произвольную точку последовательно шесть раз симметрично отразить относительно центров симметрии A, B, C, A, B, C, то она вернется в исходное положение.*

В. И. Стомахин

Избранные школьные задачи

Восьмой класс

1. Найдите $x^2+y^2+z^2$, если

$$x+y+z=1,\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0.$$

2. Точки E и F — середины сторон AB и CD четырехугольника $ABCD$. Докажите, что середины отрезков AF, BF, CE и DE являются вершинами параллелограмма.

3. По дорожке бассейна плавают с постоянными неодинаковыми скоростями два спортсмена. Они в разное время выплывают из разных концов дорожки навстречу друг другу и первый раз встречаются в точке C. Встретившись, они разворачиваются, доплывают каждый до своего конца дорожки и снова плывут навстречу друг другу, пока не встретятся в точке D, и так далее. Где произойдет их 20-я встреча?

4. Решите уравнение

$$\left(\frac{x+2}{x+1}\right)^2+\left(\frac{x-2}{x-1}\right)^2-\frac{5}{2}\,\frac{x^2-4}{x^2-1}=0.$$

5. В треугольнике ABC угол A равен $75°$, высота CH равна половине стороны AB. Найдите угол CBA.

Девятый класс

6. Решите уравнение

$$\sqrt{x+2+3\sqrt{2x-5}}+\sqrt{x-2-\sqrt{2x-5}}=2\sqrt{2}.$$

7. На сторонах AB, AC и BC треугольника ABC даны точки M, L и K такие, что четырехугольник $KLMB$ — параллелограмм. Найдите площадь этого параллелограмма, если известно, что площади треугольников AML и KLC соответственно равны S_1 и S_2.

8. Числа α, β, γ таковы, что $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $0<\beta<\frac{\pi}{2}$, $0<\gamma<\frac{\pi}{2}$ и $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\gamma<1$. Докажите, что $\alpha+\beta+\gamma<\frac{\pi}{2}$.

9. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-\sqrt{y}=1, \\ y-\sqrt{z}=1, \\ z-\sqrt{x}=1. \end{cases}$$

10. На сторонах AB и CB треугольника ABC откладываются отрезки AM и CN такие, что $AM=CN$. Найдите геометрическое место середин отрезков MN.

Десятый класс

11. Решите уравнение

$$(1+x)^4=2(1+x^4).$$

12. В треугольнике ABC дано: $BC=a$, $AC=b$, $\angle C=\gamma$.

а) Найдите длину l_c биссектрисы угла C.

б) Докажите, что если в треугольнике две биссектрисы равны, то этот треугольник — равнобедренный.

13. Из каких точек плоскости Oxy парабола $y=x^2$ видна под прямым углом?

14. Найдите целую часть числа $\lg 3+\lg_3 10$.

15. Докажите, что

а) внутри любой треугольной пирамиды $ABCD$ существует единственная точка O такая, что $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{0}$;

б) точка O является точкой пересечения четырех отрезков, соединяющих вершины пирамиды с точками пересечения медиан противоположных граней;

в) для любых точек $A_1, A_2, \ldots, A_n$ существует единственная точка O такая, что $\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OA_3}+\ldots+\overrightarrow{OA_n}=\overrightarrow{0}$.

Публикацию подготовил *А. А. Егоров*

Наш календарь

К 175-летию закона Авогадро

(Начало см. на с. 12)

говоря, различие между атомами и молекулами было по-настоящему осознанно именно благодаря извлеченной из забвения работе Авогадро.

А между тем уже сам Авогадро отчетливо представлял, сколь широкие возможности открывает найденный им закон для определения химических формул различных газообразных веществ, для определения их относительных атомных и молекулярных масс. Но какова физическая основа его закона, так сказать, откуда он берется, Авогадро не знал. Исчерпывающее объяснение дала возникшая в конце 50-х годов прошлого века кинетическая теория газов.

Хотя Авогадро, конечно, понимал, что число молекул, скажем, в одном литре газообразного вещества (согласно открытому им закону, универсальное для всех газов) огромно, о каких конкретно величинах может тут идти речь, узнать ему не довелось. Эта задача была надежно решена лишь в начале нашего столетия, и только после этого отпали последние сомнения в реальности атомов, представления о которых зародились около двух с половиной тысячелетий тому назад. Измерения, проведенные несколькими совершенно различными способами, привели к одному и тому же результату, который обычно записывают в виде

$$N_A=6{,}02\cdot 10^{23}\ \text{моль}^{-1},$$

где N_A — число частиц в одном моле вещества, одна из важнейших универсальных постоянных физики и химии, получившая название числа Авогадро.

Б. Е. Явелов

Задачи

1. Проверьте, что $(3^2+5^2)^2=16^2+30^2$, и попробуйте доказать, что квадрат суммы двух квадратов различных чисел всегда является суммой двух квадратов.

2. Решите арифметический ребус: НИТКА+НИТКА=ТКАНЬ. Одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным — разные.

3. Заядлый альпинист дядя Сережа рассказывал нам, что сумерки в горах заметно короче, чем на равнине. Как вы думаете, с чем это связано?

4. Чтобы попасть домой из Дворца пионеров, я могу выйти либо на станции метро Математическая, либо на следующей — станции Физическая. От станции Математическая я иду втрое дольше до дома, чем от станции Физическая, причем пока поезд подходит к станции Физическая, я успеваю пройти треть пути от станции Математическая до дома. В каком случае я быстрее попаду домой?

5. На рисунке изображена часть крепостной стены. Один из камней стены имеет столь причудливую форму, что если вытащить его из стены и положить иначе, то стена станет ровной (см. рисунок; на рисунке переложены **два** камня). Изобразите этот камень.

Эти задачи нам предложили: ученик 8 класса из Ворошиловграда *Миша Кравченко*, *В. А. Гончарук*, *А. И. Буздин*, *В. Д. Вьюн*, *А. М. Домашенко*.

Алиса даёт показания

1. Перед началом судебного заседания присутствующие обменивались друг с другом рукопожатиями. Докажите, что число людей, пожавших нечетное число рук, четно.

2. Что лучше: бутерброд с ветчиной или вечное блаженство?

3. Присяжные разместились в зале суда так, что каждый из них видел одно и то же количество других присяжных, причем ни один из них не видел всех остальных. Как они могли разместиться?

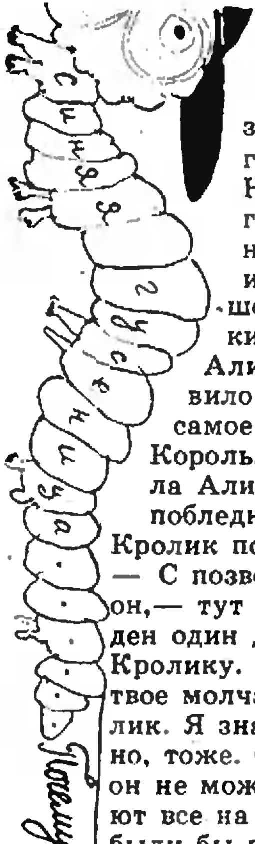
4. Можно ли 12 присяжных заседателей занумеровать так, чтобы слева от первого сидел тот, слева от которого сидит второй; слева от второго — тот, слева от которого — первый, и т. д. Наконец, слева от 12-го сидел тот, слева от которого сидит первый.

5. 3 кренделя, 5 коврижек и 6 баранок стоят вместе 24 пенса. Что дороже: крендель или баранка?

— Здесь! — крикнула Алиса, и так быстро вскочила, что задела краем юбки скамью, на которой сидели присяжные. Скамья опрокинулась, и все присяжные посыпались вниз.— Простите, пожалуйста! — огорченно вскрикнула Алиса и принялась торопливо подбирать присяжных. Как только присяжные пришли в себя, они принялись усердно писать историю этого происшествия.— Что ты знаешь об этом деле? — спросил Король.— Ничего,— ответила Алиса.— Это очень важно,— произнес Король, поворачиваясь к присяжным. Тут вмешался Белый Кролик.— Ваше Величество

Какую скамью легче опрокинуть — опрокинутую или неопрокинутую?

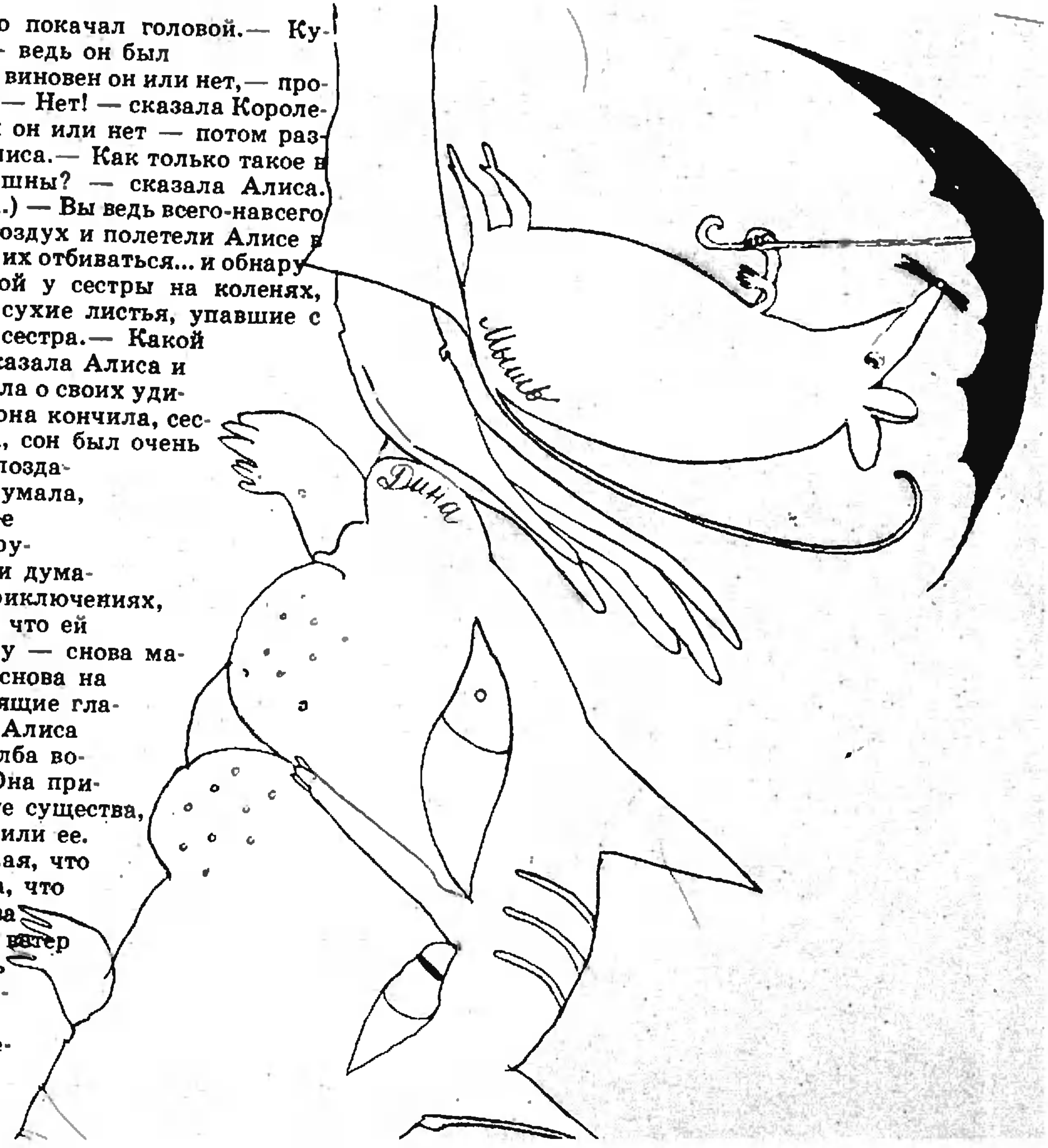
Болванщик



хочет, конечно, сказать: неважно,— произнес он почтительно.— Ну да,— поспешно сказал Король.— Я именно это и хотел сказать. Конечно, неважно! И забормотал вполголоса: — Важно — неважно... неважно — важно... Некоторые присяжные записали: «Важно!», а другие — «Неважно!». В эту минуту Король крикнул: — Тихо! Посмотрел в записную книжку и прочитал: «Правило 42. Всем, в ком больше мили росту, следует немедленно покинуть зал».— Никуда я не уйду,— сказала Алиса.— И вообще, это не настоящее правило. Вы его только что выдумали.— Это самое старое правило в книжке! — возразил Король.— Почему же оно тогда 42-е? — спросила Алиса.— Оно должно быть первым! Король побледнел и торопливо закрыл книжку. Белый Кролик поспешно вскочил со своего места.

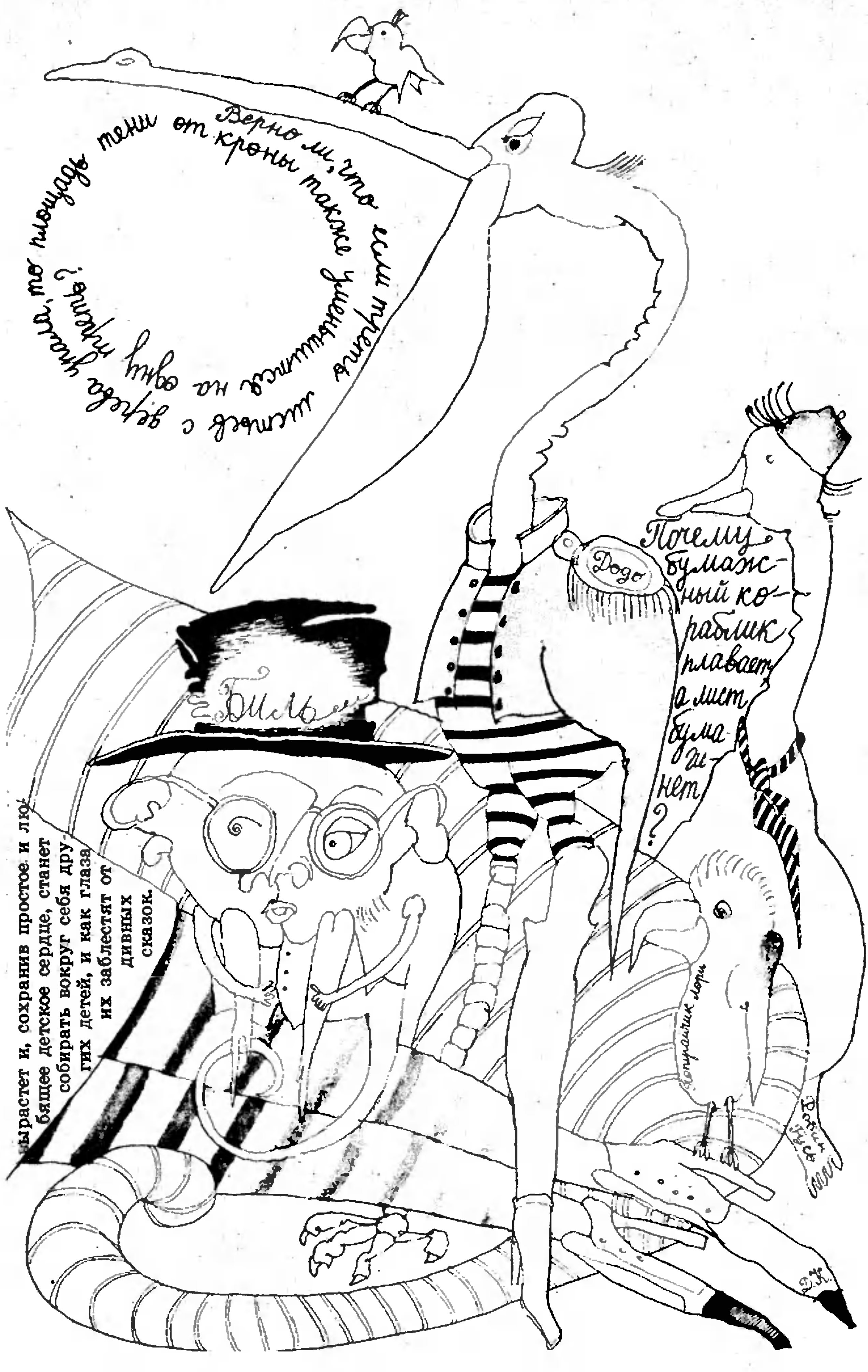
— С позволения Вашего Величества,— сказал он,— тут есть еще улики. Только что был найден один документ.— Читай! — сказал Король Кролику. Кролик надел очки. Воцарилось мертвое молчание. Вот что прочитал Белый Кролик. Я знаю, с ней ты говорил И с ним, конечно, тоже. Она сказала: «Очень мил, Но плавать он не может». Там побывали та и тот (Что знают все на свете), Но если б делу дали ход, Вы были бы в ответе. Я дал им три, они нам — пять, Вы шесть им посулили. Но все вернулись к вам опять, Хотя моими были. Она, конечно, горяча, Не спорь со мной напрасно. Да, видишь ли, рубить сплеча Не так уж безопасно. Но он не должен знать о том (Не выболтай случайно), Все остальные ни при чем, И это наша тайна.— Это очень важная улика,— проговорил Король.— Все, что мы сегодня слышали, по сравнению с ней бледнеет. А теперь пусть присяжные обдумают свое... Но Алиса не дала ему кончить.— Если кто-нибудь из них сумеет объяснить мне эти стихи,— сказала Алиса, — я дам ему шесть пенсов.— Я уверена, что в них нет никакого смысла! Король взглянул на стихи одним глазом и произнес: — Кое-что я, кажется, объяснить могу, «...но плавать он не может...» И, повернувшись к Валету, Король спросил: — Ты

ведь не можешь плавать? Валет грустно покачал головой.— Куда мне! — сказал он. (Это было верно — ведь он был бумажный.) — Пусть присяжные решают, виновен он или нет,— произнес Король в двадцатый раз за этот день.— Нет! — сказала Королева.— Пусть выносят приговор! А виновен он или нет — потом разберемся! — Чепуха! — сказала громко Алиса.— Как только такое в голову может прийти! — Кому вы страшны? — сказала Алиса. (Она уже выросла до своего обычного роста.) — Вы ведь всего-навсего колода карт! Тут все карты поднялись в воздух и полетели Алисе в лицо. Она вскрикнула, принялась от них отбиваться... и обнаружила, что лежит на берегу, головой у сестры на коленях, а та тихо смахивает у нее с лица сухие листья, упавшие с дерева.— Алиса, проснись сказала сестра.— Какой мне странный сон приснился! — сказала Алиса и рассказала сестре все, что запомнила о своих удивительных приключениях. А когда она кончила, сестра поцеловала ее и сказала: — Правда, сон был очень странный! А теперь беги домой, не то опоздаешь к чаю. Алиса бежала и все время думала, что это был за чудесный сон. А сестра ее осталась сидеть на берегу. Подпершись рукой, смотрела она на заходящее солнце и думала о маленькой Алисе и ее чудесных Приключениях, пока не погрузилась в полудрему. И вот что ей привиделось. Сначала она увидела Алису — снова маленькие руки обвились вокруг ее колен, снова на нее смотрели снизу вверх большие блестящие глаза. Она слышала ее голос и видела, как Алиса встряхивает головой, чтобы откинуть со лба волосы, которые вечно лезут ей на глаза. Она прислушалась: все вокруг ожило, и странные существа, которые снились Алисе, казалось, окружили ее. Так она и сидела, закрыв глаза, воображая, что и она попала в Страну Чудес, хотя знала, что стоит ей открыть их, как все вокруг снова станет привычным и обыденным; только ветер зашуршит травой, погонит по пруду рябь и зашатает камыши; звон посуды превратится в треньканье колокольчика на шее у овцы, пронзительный голос Королевы — в окрик пастуха, плач младенца и крик Грифона — в шум скотного двора. И она представила себе, как ее сестра



из себя, то, как правило, сразу много, а приходит в себя понемногу?

вырастет и, сохранив простое и любящее детское сердце, станет собирать вокруг себя других детей, и как глаза их заблестят от дивных сказок.



задачник кванта

Задачи

М1016—М1020; Ф1028—Ф1032

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 15 февраля 1987 года по адресу: 103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 12—86» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М1016, М1017» или «Ф1028». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «... новая задача по математике»). В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь. Фамилию и имя просим писать печатными буквами. Задачи М1017 — М1019 предлагались на XXVII Международной математической олимпиаде.

М1016. Многоугольник описан около окружности с центром O. Пусть P — центр масс многоугольника, K — центр масс его контура. Докажите, что точки P, O и K лежат на одной прямой, причем $PO=2PK$. (При определении центра P мы рассматриваем многоугольник как однородную пластину, центра K — как контур из однородной проволоки.).

И. З. Вайнштейн

М1017*. Каждой вершине правильного пятиугольника приписано некоторое целое число так, что сумма всех пяти чисел положительна. Разрешается проделать следующую операцию: если трем последовательным вершинам приписаны числа x, y, z и $y<0$, то эти числа заменяются соответственно на $x+y$, $-y$ и $z+y$. Такие операции выполняются, пока хотя бы одно из пяти чисел отрицательно. Обязательно ли этот процесс закончится через конечное число шагов?

М1018. Пусть A и B — соседние вершины правильного n-угольника с центром O. Треугольник XYZ, равный треугольнику OAB, вначале совпадает с ним, а потом движется в плоскости n-угольника так, что точки Y и Z остаются на контуре, а X — внутри n-угольника. Какую фигуру опишет точка X, когда Y и Z совершат полный оборот по границе n-угольника?

М1019. На листе клетчатой бумаги отмечено некоторое конечное множество M узлов (точек пересечения линий сетки). Докажите, что всегда можно окрасить некоторые точки множества M в белый цвет, а остальные — в красный так, чтобы на каждой линии сетки разность между числом белых и красных узлов по модулю не превосходила 1.

М1020*. На сфере радиуса 1 проведена
а) кривая, длина которой меньше π;
б) замкнутая кривая, длина которой меньше 2π.
Докажите, что найдется плоскость, проходящая через центр сферы, не пересекающая проведенной кривой. (Можно считать, что кривая на сфере — это «ломаная», состоящая из дуг больших кругов.)

В. В. Прасолов, Г. А. Гальперин

Ф1028. Легкий стержень с массивным шариком на верхнем конце начинает падать из вертикального положения без начальной скорости. Нижний

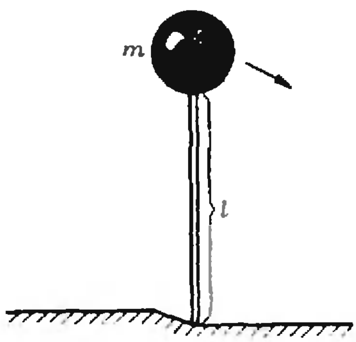


Рис. 1.

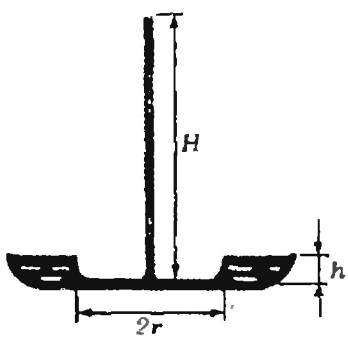


Рис. 2.

конец стержня упирается в уступ на горизонтальной плоскости (рис. 1). Какой угол с вертикалью будет составлять скорость шарика в момент удара о плоскость?

Е. И. Бутиков

Ф1029. При стационарном падении струи воды на плоское блюдце можно наблюдать такую картину: в некотором радиусе r от места падения струи уровень воды очень низок, а на расстоянии r уровень испытывает скачок (рис. 2). Оцените радиус r, если расход воды q, высота падения H, высота водяной ступени h. Считать, что начальная скорость истечения воды из крана $v_0 \ll \sqrt{2gH}$.

А. А. Алабугин, А. В. Уманский

Ф1030. На невесомой нити жесткостью k висит тело массой m. Максимальное натяжение, которое выдерживает нить, равно T. Тело приподнимают на высоту x от положения равновесия и отпускают. При каком минимальном x нить порвется?

В. Г. Харитонов

Ф1031. Проводящая сфера разбилась на несколько осколков, разлетевшихся на большие расстояния друг от друга. Осколки в произвольном порядке соединяют тонкими проводами. Что больше: электроемкость получившейся системы осколков или электроемкость сферы? Емкостью проводов пренебречь.

И. М. Луценко, ученик 10 класса

Ф1032. На автомобилях для обзора происходящего сзади используется зеркало заднего вида. Это зеркало может быть плоским или выпуклым. Распространено мнение, что одним из недостатков выпуклого зеркала является неравномерность прироста изображения равномерно приближающихся к нему предметов, из-за чего водитель автомобиля с таким зеркалом обращает внимание на нагоняющий автомобиль в потоке транспорта, лишь когда тот выходит из ряда для обгона. Верно ли это представление?

Найдите связь скорости равномерно движущегося вдоль главной оптической оси сферического зеркала предмета со скоростью изменения размеров его изображения в зеркале. Сравните выпуклое зеркало заднего вида с плоским. Каковы его преимущества и недостатки?

В. А. Котов

Problems

We have been publishing Kvant's contest problems every month from the very first issue of our magazine. The problems are nonstandard ones, but their solution requires no

M1016 — M1020; P1028 — P1032

M1016. Let P be the centre of mass of a polygon inscribed in a circle of centre O, K — the centre of mass of its boundary. Prove that the points P, O and K are on one straight line and $PO = 2 \cdot PK$. (In determining the point P, we view the polygon as a uniform plate; for the point K — as a uniform wire contour.)

I. Z. Vainshtein

information outside the scope of the USSR secondary school syllabus. The more difficult problems are marked with a star (*). After the statement of the problem, we usually indicate who proposed it to us. It goes without saying that not all these problems are first publications. The solutions of problems from this issue (in Russian or in English) may be posted no later than February 15th 1987, to the following address: USSR, Moscow, 103006, Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Please send the solutions of physics and mathematics problems, as well as problems from different issues, under separate cover; on the envelope write the words: "KVANT'S PROBLEMS" and the numbers of all the solved problems; in your letter enclose an unstamped selfaddressed envelope — we shall use it to send you the correction results. At the end of the academic year we sum up the results of the Kvant problem contest. If you have an original problem to propose for publication, please send in to us under separate cover, in two copies (in Russian or in English), including the solution. On the envelope write NEW PROBLEM IN PHYSICS (or MATHEMATICS). Please print your name and address in BLOCK LETTERS.

M1017*. To each vertex of a regular pentagon an integer is assigned in such a way that the sum of all the five numbers is positive. If three consecutive vertices are assigned the numbers x, y, z respectively and $y<0$, then the following operation is allowed: the numbers x, y, z are replaced by $x+y, \ -y, \ z+y$ respectively. Such an operation is performed repeatedly as long as at least one of the five numbers is negative. Determine whether this procedure necessarily comes to an end after a finite number of steps.

M1018. Let A, B be adjacent vertices of a regular n-gon ($n\geqslant 5$) in the plane having center at O. A triangle XYZ, which is congruent to and initially coincides with OAB, moves in the plane in such a way that Y and Z each trace out the whole boundary of the polygon, X remaining inside the polygon. Find the locus of X.

M1019. One is given a finite set of points in the plane, each point having integer coordinates. Is it always possible to color some of the points in the set red and the remaining points white in such a way that for any strainght line L parallel to either one of the coordinate axes the difference (in absolute value) between the numbers of white points and red points on L is not greater than 1? Justify your answer.

M1020*. Two lines are drawn on the surface of a sphere of radius 1:

a) a curve of length less than π;

b) a closed curve of length less than 2π.

Prove, for each of the cases a) and b), that there exists a plane passing through the centre of the sphere which does not intersect the given curve. (It may be assumed that a curve on the sphere is a «polygonal line» consisting of arcs of great circles.)

V. V. Prasolov, G. A. Galperin

P1028. A weightless rod with a small massive ball at the upper extremity begins to fall from vertical position without initial velocity. The lower extremity is blocked from the side as shown on figure Рис. 1 (p. 27). What angle with the vertical will the velocity of the ball form at the moment of contact with the horizontal plane?

E. I. Butikov

P1029. In the stationary fall of a stream of water on a flat saucer, the following picture may be observed: at some distance r from the place where the stream falls, the water level is very low and then jumps sharply upward (see figure Рис. 2). Estimate the distance r if the rate of water flow is q, it falls from height H and the height of the "step" of water is h. You may assume that the initial velocity of water flowing out of the tap is $v_0 \ll \sqrt{2gH}$.

A. A. Alabugin, A. V. Umanski

P1030. A weightless string of elasticity k supports a body of mass m. The maximal tension which the string can withhold is T. The body is lifted to the height x above its initial position and then dropped. For what minimal x will the string break?

V. G. Kharitonov

P1031. A conducting sphere broke into several pieces which fell in different directions far from each other. The pieces are joined in arbitrary order by thin wires. What is greater — the electric capacity of the system thus obtained of that of the whole sphere? The capacity of the wires is negligible.

I. M. Lutsenko, 10th form pupil

P1032. Rear view mirrors in automobiles can be convex or plane. The general opinion is that one of the defects of convex rear view mirrors is the non-uniform size increase of images of objects uniformly approaching the mirror, as the result of which the driver looking into such a mirror will notice a car catching up with him only if it changes lanes to pass him. Is this correct? Find the relationship between the speed of an object moving uniformly along a spherical mirror's optical axis and the rate of change of its mirror image's size. Compare a convex mirror with a plane one. What are its advantages and disadvantages?

V. A. Kotov

Решения задач

М996—М1000; Ф1008—Ф1012

М996. *Два одинаковых квадрата в пересечении образуют восьмиугольник. Стороны одного квадрата синие, другого — красные. Докажите, что сумма длин синих сторон восьмиугольника равна сумме длин его красных сторон.*

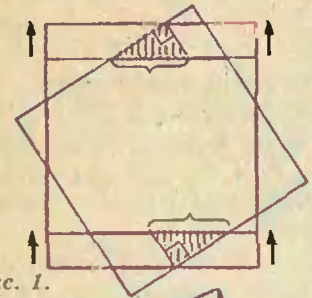


Рис. 1.

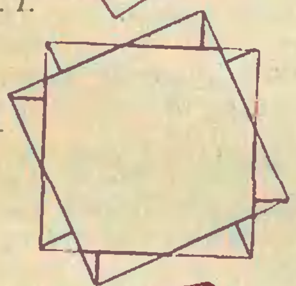
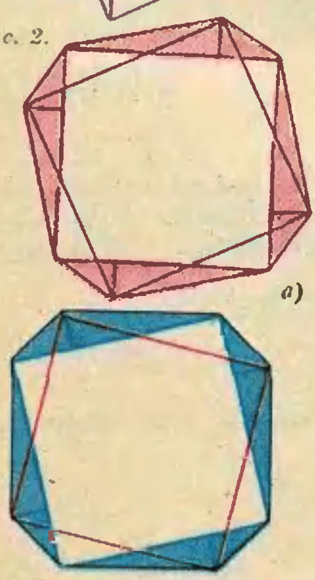


Рис. 2.



а) *б)*

Рис. 3.

Если центры квадратов совпадают, утверждение задачи очевидно. Это расположение всегда можно получить, сдвинув параллельно один из квадратов, поэтому достаточно доказать, что при параллельном переносе, скажем, красного квадрата сумма красных сторон восьмиугольника-пересечения не меняется. При этом можно ограничиться сдвигом вдоль одной из сторон этого квадрата, так как любой параллельный перенос можно заменить двумя такими сдвигами (вдоль перпендикулярных сторон).

Итак, сдвинем красный квадрат вдоль одной из его сторон (рис. 1). Тогда две стороны восьмиугольника (параллельные направлению сдвига) не изменятся; третья сторона уменьшится на величину, равную гипотенузе прямоугольного треугольника, показанного на рисунке 1 штриховкой, а четвертая сторона увеличится на такую же величину (заштрихованные треугольники, очевидно, имеют одинаковые углы и одинаковые высоты, опущенные на гипотенузу, и следовательно, равны). Таким образом, сумма всех 4 красных сторон не меняется, что и требовалось доказать.

Приведем еще одно решение. Рассмотрим прямоугольные треугольники, отсекаемые от каждого из квадратов сторонами другого квадрата, и проведем в них высоты из вершин прямых углов. Все эти треугольники подобны между собой, поэтому достаточно доказать, что сумма красных высот (см. рис. 2) равна сумме синих высот. Для доказательства надо только заметить, что сумма площадей 4 красных треугольников (рис. 3, *а*) равна сумме площадей синих треугольников (рис. 3, *б*), поскольку каждая из этих сумм равна разности площади выпуклого восьмиугольника, вершинами которого являются вершины данных квадратов, и площади квадрата, и что эти суммы равны произведениям полупериметра квадрата на суммы красных и синих высот.

Аналогичное рассуждение о площадях упомянутых выше прямоугольных треугольников, отсекаемых квадратами друг от друга, показывает, что и сумма квадратов длин красных сторон восьмиугольника равна сумме квадратов длин синих сторон.

В. В. Произволов

◆

М997. *Докажите, что сумма всех чисел вида $1/mn$, где m и n — натуральные числа, $1\leqslant m<n\leqslant 1986$, не является целым числом.*

Среди чисел от 1 до 1986 имеются ровно два — $729=3^6$ и $1458=2\cdot 3^6$, — делящиеся на 3^6; наибольшая степень 3, на которую могут делиться остальные числа,— 3^5. Таким образом, всевозможные произведения mn ($1\leqslant m<n\leqslant 1986$), за исключением $729\cdot 1458=2\cdot 3^{12}$, содержат множителем число 3 самое большее в степени 11. Приведя сумму всех дробей $1/mn$ (кроме $1/729\cdot 1458$) к наименьшему общему знаменателю, мы получим дробь

вида $a/(3^{11}\cdot b)$, где a и b — натуральные числа, причем b не делится на 3. Пусть s — сумма, рассматриваемая в задаче, тогда

$$s-\frac{a}{3^{11}b}=\frac{1}{2\cdot 3^{12}},$$

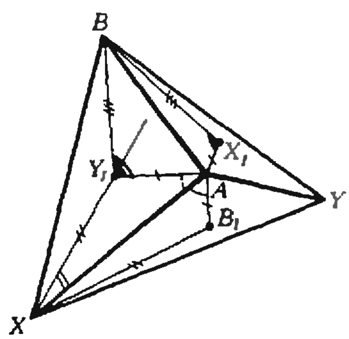
или $2\cdot 3^{12}sb-6a=b$. При целом s левая часть здесь делится на 3, а правая — нет. Поэтому s не может быть целым.

Д. А. Митькин

М998*. *Рассмотрим все тетраэдры $AXBY$, описанные около данной сферы. Докажите, что при фиксированных точках A и B сумма углов четырехугольника $AXBY$, то есть сумма*

$$\angle AXB+\angle XBY+\angle BYA+\angle YAX,$$

не зависит от выбора точек X и Y.



◆

Обозначим через A_1, B_1, X_1, Y_1 точки касания сферы с гранями BXY, XYA, YAB, ABX соответственно (см. рисунок). Треугольники AXB_1 и AXY_1 равны (сторона AX у них общая, а $AB_1=AY_1$ и $XB_1=XY_1$ как касательные, проведенные к сфере из общей точки), поэтому $\angle B_1AX=\angle Y_1AX$. Следовательно, сумма $\angle B_1AX+\angle AXY_1$ равна $\angle Y_1AX+\angle AXY_1$, то есть внешнему углу треугольника AY_1X при вершине Y_1 (на рисунке отмечен красной дужкой). Аналогично сумма $\angle A_1BX+\angle BXY_1$ равна внешнему углу треугольника BY_1X при Y_1 (отмечен синей дужкой), поэтому $\angle B_1AX+\angle AXB+\angle A_1BX=\angle AY_1B$. Точно так же

$$\angle B_1AX+\angle AYB+\angle A_1BY=\angle AX_1B.$$

Складывая эти равенства, получим в левой части рассматриваемую в задаче сумму углов, а в правой — величину, не зависящую от X и Y (точки X_1 и Y_1 определяются прямой AB и сферой однозначно).

И. Ф. Шарыгин

М999*. *а) Докажите, что для любых положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ выполнено неравенство*

$$\frac{1}{a_1}+\frac{2}{a_1+a_2}+\ldots+\frac{n}{a_1+a_2+\ldots+a_n}<4\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right).$$

Докажите, что константу 4 в правой части неравенства б) можно заменить на 2; в) нельзя заменить числом, меньшим 2.

◆

а) Пусть $b_1, b_2, \ldots, b_n$ — это последовательность чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$, расположенных в порядке возрастания. Поскольку при любом i от 1 до n

$$\frac{i}{a_1+a_2+\ldots+a_i}\leqslant\frac{i}{b_1+b_2+\ldots+b_i}$$

и

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}=\frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_2}+\ldots+\frac{1}{b_n},$$

достаточно доказать неравенство для чисел b_i:

$$\frac{1}{b_1}+\frac{2}{b_1+b_2}+\ldots+\frac{n}{b_1+b_2+\ldots+b_n}\leqslant 4\left(\frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_2}+\ldots+\frac{1}{b_n}\right).$$

Оценим слагаемые в левой части так:

$$\frac{2}{b_1+b_2}\leqslant\frac{2}{b_1+b_1}=\frac{1}{b_1},$$

и при любом k, $2\leqslant k\leqslant(n+1)/2$,

$$\frac{2k-1}{b_1+b_2+\ldots+b_{2k-1}}\leqslant\frac{2k-1}{b_k+\ldots+b_{2k-1}}\leqslant\frac{2k-1}{kb_{k-1}}<\frac{2}{b_{k-1}},$$

$$\frac{2k}{b_1+b_2+\ldots+b_{2k}}\leqslant\frac{2k}{b_{k+1}+\ldots+b_{2k}}\leqslant\frac{2k}{kb_k}=\frac{2}{b_k}.$$

Отсюда следует нужное неравенство:

$$\frac{1}{b_1}+\frac{2}{b_1+b_2}+\frac{3}{b_1+b_2+b_3}+\frac{4}{b_1+b_2+b_3+b_4}+\ldots<$$

$$<\frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_1}+\frac{2}{b_1}+\frac{2}{b_2}+\frac{2}{b_2}+\frac{2}{b_3}+\frac{2}{b_3}+\ldots=$$

$$=4\left(\frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_2}+\frac{1}{b_3}+\ldots\right).$$

б) Пример, приведенный в пункте в), подсказывает, что неравенство с константой 2 в правой части близко к равенству, когда числа a_i/i примерно равны. Положим $t_i=a_i/i$, $1\leqslant i\leqslant n$. Тогда для любого $m\leqslant n$ верна такая оценка:

$$\frac{m}{a_1+a_2+\ldots+a_m}=\frac{m}{t_1+2t_2+\ldots+mt_m}=\frac{m}{t_1+\underbrace{t_2+t_2}_{2}+\ldots+\underbrace{t_m+\ldots+t_m}_{m}}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{m}{(m(m+1)/2)^2}\left(\frac{1}{t_1}+\underbrace{\frac{1}{t_2}+\frac{1}{t_2}}_{2}+\ldots+\underbrace{\frac{1}{t_m}+\ldots+\frac{1}{t_m}}_{m}\right)=$$

$$=\frac{4}{m(m+1)^2}\left(\frac{1}{t_1}+\frac{2}{t_2}+\ldots+\frac{m}{t_m}\right)=\frac{4}{m(m+1)^2}\left(\frac{1}{a_1}+\frac{2^2}{a_2}+\ldots+\frac{m^2}{a_m}\right)$$

$$(p_1+\ldots p_N)\left(\frac{1}{p_1}+\ldots+\frac{1}{p_N}\right)\geqslant$$
$$\geqslant N+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant N}\left(\frac{p_i}{p_j}+\frac{p_j}{p_i}\right)\geqslant$$
$$\geqslant N+\frac{N(N-1)}{2}\cdot 2=N^2$$

(мы применили неравенство, указанное на полях, для $N=\frac{m(m+1)}{2}=1+2+\ldots+m$ чисел, среди которых t_j берется j раз; ту же оценку можно получить, используя неравенство Коши-Буняковского для наборов $x_i=\sqrt{a_i}$ и $y_i=i/\sqrt{a_i}$, $1\leqslant i\leqslant m$).

Неравенство Коши-Буняковского:
$$(x_1^2+\ldots+x_n^2)(y_1^2+\ldots+y_n^2)\geqslant$$
$$\geqslant(x_1y_1+\ldots+x_ny_n)^2$$

Сложим все такие оценки при m от 1 до n; коэффициент при $1/a_i$ будет равен

$$\beta_i=4i^2\left(\frac{1}{i(i+1)^2}+\frac{1}{(i+1)(i+1)^2}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)^2}\right).$$

А поскольку

$$\frac{1}{j(j+1)^2}<\frac{1}{2}\,\frac{2j+1}{j^2(j+1)^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{j^2}-\frac{1}{(j+1)^2}\right),$$

справедлива оценка

$$\beta_i<4i^2\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{i^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right)<2.$$

в) Положим $a_i=i$. Тогда левая часть неравенства равна $2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{1+n}\right)$, а правая $c\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)$, где c — константа, на которую мы и хотим заменить 4. Если $c\leqslant 2$, то их разность

$$2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n+1}\right)-c\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)=$$

$$=(2-c)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right)+\frac{2}{n+1}-c$$

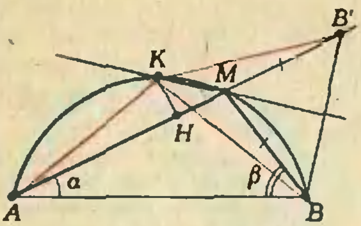
при достаточно большом n будет положительна, поскольку с ростом n сумма $\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}$ неограниченно растет.

Это следует, например, из такой оценки: при $n=2^k$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^k}>\frac{1}{2}+\underbrace{\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}}_{2^1}+\ldots+\underbrace{\frac{1}{2^k}+\ldots+\frac{1}{2^k}}_{2^{k-1}}=\frac{k}{2}.$$

Л. Д. Курляндчик, Л. С. Меркурьев

М1000. *В дугу AB вписана ломаная AMB из двух отрезков ($AM > MB$). Докажите, что основание перпендикуляра KH, опущенного из середины K дуги AB на отрезок AM, делит ломаную пополам: $AH = HM + MB$.*



На продолжении отрезка AM отложим точку B' такую, что $MB' = MB$ (см. рисунок). Угол $B'MB$ как внешний угол треугольника AMB равен сумме углов MAB и MBA. В то же время угол KMA как вписанный измеряется половиной дуги AK и, следовательно, равен полусумме углов MAB и MBA. Поэтому MK — биссектриса угла $B'MB$. Это значит, что $MK \perp B'B$ и $KB' = KB$. Отсюда следует, что $KA = KB = KB'$. Опуская из точки K перпендикуляр KH на AM, получим $AH = HB' = HM + MB$, что и требовалось.

Эту задачу можно решить и с помощью тригонометрии: положив $\angle MAB = \alpha$, $\angle MBA = \beta$, получим: $AM = 2R \sin \beta$, $MB = 2R \sin \alpha$. Поэтому Поэтому

$$AM + MB = 2R(\sin \beta + \sin \alpha) = 4R \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2}.$$

С другой стороны,

$$AK = 2R \sin \frac{\alpha+\beta}{2}, \quad \angle KAM = \frac{\beta-\alpha}{2},$$

и потому

$$AH = 2R \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\beta-\alpha}{2} = \frac{1}{2}(AM + MB).$$

Архимед — автор этой задачи — опубликовал ее в трактате «Измерение круга» в такой формулировке: *«Если вписанный в дугу окружности сломанный на две неравные части отрезок прямой принимает опущенный на него из середины дуги перпендикуляр, то этот перпендикуляр разделит всю ломаную линию пополам»*. Это утверждение позволяло вычислять длины хорд суммы и разности двух данных дуг.

А. А. Егоров

◆

Ф1008. *Стержень AB помещен внутрь цилиндра. В точке A стержень закреплен шарнирно, в точке C он опирается на верхнюю кромку цилиндра, точки A и C лежат в вертикальной плоскости, проходящей через ось цилиндра (рис. 1); угол, который составляет стержень с горизонтом, равен α. Стержень смещают по верхней кромке так, что он касается ее в точке C' и угол $C'OC$ равен φ. При каком минимальном коэффициенте трения стержень будет находиться в этом положении в равновесии?*

Пусть стержень находится в равновесии в новом положении, когда он касается цилиндра в точке C'. На стержень действуют сила тяжести, сила реакции шарнира в точке A, сила $\vec{N}$ нормальной реакции цилиндра в точке C' и сила трения $\vec{f}$. Условие равновесия стержня — равенство нулю геометрической суммы этих сил и равенство нулю суммы моментов сил.

Из всех уравнений равновесия стержня рассмотрим одно — равенство нулю суммы моментов сил относительно вертикальной оси, проходящей через точку A (относительно этой оси момент силы реакции шарнира и момент силы тяжести равны нулю). Нетрудно понять, что это условие сводится к тому, что суммарный вектор сил $\vec{N}$ и $\vec{f}$ лежит в вертикальной плоскости, проходящей через стержень (нас впоследствии будет интересовать только горизонтальная составляющая этой суммарной силы). Определим теперь направления векторов $\vec{N}$ и $\vec{f}$ и значения проекций этих векторов на горизонтальную плоскость — N_x, N_y, f_x и f_y. Оси координат X, Y и Z направим из точки C' соответственно в центр окружности O, по касательной к окружности и вертикально вверх (рис. 2).

Введем три единичных вектора $\vec{n}_l$, $\vec{n}_N$ и $\vec{n}_f$, ко-

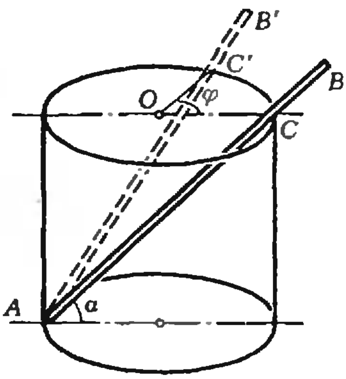


Рис. 1.

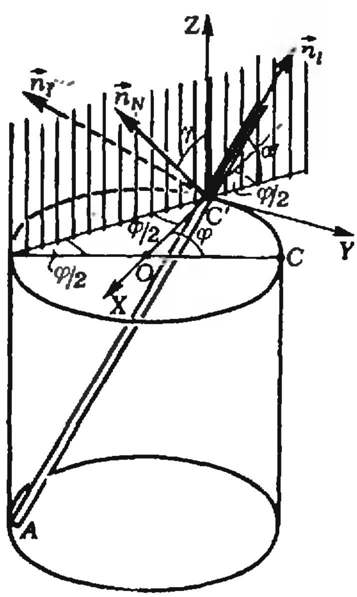


Рис. 2.

торые направлены соответственно вдоль стержня, вдоль силы $\vec{N}$ и вдоль силы $\vec{f}$. Пусть угол, который образует вектор $\vec{n}_l$ с горизонтом, равен α'. Так как в результате поворота стержня вертикальная плоскость, в которой он лежит, поворачивается на угол $\varphi/2$, то нетрудно показать, что

$$\operatorname{tg}\alpha' = \operatorname{tg}\alpha/\cos(\varphi/2).$$

Выразим каждый из векторов $\vec{n}_l$, $\vec{n}_N$ и $\vec{n}_f$ через единичные векторы $\vec{n}_x$, $\vec{n}_y$ и $\vec{n}_z$. Начнем с $\vec{n}_l$:

$$\vec{n}_l = \vec{n}_x\left(-\cos\alpha'\cos\frac{\varphi}{2}\right) + \vec{n}_y\cos\alpha'\sin\frac{\varphi}{2} + \vec{n}_z\sin\alpha'.$$

Сила $\vec{N}$ перпендикулярна стержню и касательной к окружности в точке C' (кромке цилиндра), откуда следует, что вектор $\vec{n}_N$ перпендикулярен вектору $\vec{n}_y$, то есть

$$\vec{n}_N = \vec{n}_x\sin\gamma + \vec{n}_z\cos\gamma, \qquad (*)$$

а также вектору $\vec{n}_l$. Отсюда получим соотношение между углами γ и α' в виде

$$\operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha'/\cos(\varphi/2).$$

Чтобы определить направление вектора $\vec{n}_f$, учтем, что он перпендикулярен и вектору $\vec{n}_N$, и вектору $\vec{n}_l$. После несложных выкладок получим

$$\vec{n}_f = \vec{n}_x\left(-\cos\gamma\cos\alpha'\sin\frac{\varphi}{2}\right) + \vec{n}_y\left(-\sin\gamma\sin\alpha' - \cos\gamma\cos\alpha'\cos\frac{\varphi}{2}\right) + \vec{n}_z\sin\gamma\cos\alpha'\sin\frac{\varphi}{2}. \qquad (**)$$

Из уравнений (*) и (**) следует, что

$N_x = N\sin\gamma$, $N_y = 0$,

$$f_x = f\left(-\cos\gamma\cos\alpha'\sin\frac{\varphi}{2}\right),$$

$$f_y = f\left(-\sin\gamma\sin\alpha' - \cos\gamma\cos\alpha'\cos\frac{\varphi}{2}\right).$$

Как уже было отмечено, уравнение моментов сил сводится к тому, что, в частности, горизонтальная проекция суммы сил $\vec{N}$ и $\vec{f}$ должна лежать в плоскости стержня, то есть

$$f_x\sin\frac{\varphi}{2} + N_x\sin\frac{\varphi}{2} + f_y\cos\frac{\varphi}{2} = 0.$$

Минимальное значение коэффициента трения $k_{\min}$ определяется соотношением $k_{\min}N = f$. Тогда окончательно получим

$$k_{\min} = \frac{\operatorname{tg}(\varphi/2)}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha\cos^2(\varphi/2)}}.$$

С. С. Кротов

◆

Ф1009. *Плоский диск радиуса R, расположенный в горизонтальной плоскости, начинают продвигать между двумя вертикальными нитями, расстояние между которыми R; длина каждой нити 2l, жесткость k, концы нитей закреплены (рис. 1). Найти силу, дейст-*

Рассмотрим систему через некоторое время после начала движения диска. Пусть за это время диск сместился на расстояние AA' ($|AA'| = |BB'|$, где A и B — точки крепления нитей на виде сверху (рис. 2)). Покажем, что в этот момент точки A_1 и B_1 касания нитей с диском лежат на радиусах, проходящих через точки A и B (см. рис. 2, *а*).

вующую на диск со стороны одной нити через время t, если в начальный момент нити были нерастянуты и касались диска; диск двигают с постоянной скоростью v. Толщиной диска пренебречь; трение не учитывать.

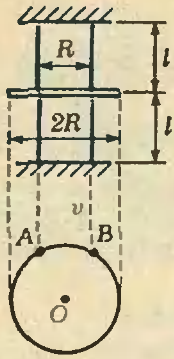


Рис. 1.

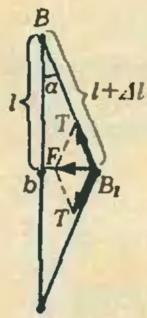


Рис. 3. b — точка на диске, лежащая под точкой B крепления нити; $|bB_1|=r$.

Предположим, что правая нить касается диска в точке B_2, лежащей ниже точки B_1 (рис. 2, *б*). Очевидно, что сила T упругости нити направлена вдоль отрезка BB_2. Эта сила имеет проекции на касательную к диску в точке B_2 и на радиус OB_2. Со стороны диска на нить действует

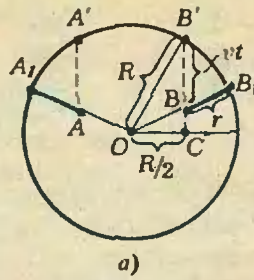
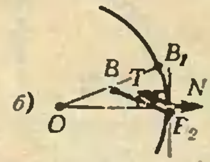


Рис. 2. а) В треугольнике $OB'C$ $\angle OB'C=30°$, $\cos \widehat{OB'C}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.



В треугольнике $OB'B$ $|OB'|=R$, $|BB'|=vt$,

$$|OB|=\sqrt{R^2+v^2t^2-Rvt\sqrt{3}}.$$

Так что

$$r=R-\sqrt{R^2+v^2t^2-Rvt\sqrt{3}}.$$

сила реакции N, направленная по радиусу OB_2. Вдоль касательной никакие силы со стороны диска на нить не действуют (трение отсутствует). Следовательно, в результате действия силы T, направленной вдоль BB_2, точка B_2 нити будет скользить по краю диска к точке B_1. К аналогичному выводу мы пришли бы, предположив, что точка касания нити с диском лежит выше точки B_1. (Подобные рассуждения справедливы и для левой нити.)

Следовательно, в любой момент нити касаются диска в точках, которые лежат на радиусах, проходящих через точки A и B. Найдем силу F, действующую на диск со стороны левой нити в момент, когда $|BB'|=vt$ (см. рис. 2, *а*).

Пусть удлинение нити к этому моменту равно Δl. Тогда со стороны каждой половины нити на диск в точке B_1 действует сила $T=k\cdot\Delta l$, и суммарная сила, с которой нить действует на диск, равна

$$F=2T\sin\alpha=2k\cdot\Delta l\cdot\sin\alpha,$$

где α — угол, который составляют половины нити с вертикалью (рис. 3). Как видно из рисунка 3,

$$\sin\alpha=\frac{|bB_1|}{|BB_1|}=\frac{r}{l+\Delta l},$$

$$l+\Delta l=\sqrt{l^2+r^2},\quad \Delta l=\sqrt{l^2+r^2}-l,$$

так что

$$F=2kr\frac{\sqrt{l^2+r^2}-l}{\sqrt{l^2+r^2}}=2kr\left(1-\frac{l}{\sqrt{l^2+r^2}}\right),$$

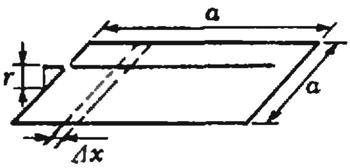
где $r=R-\sqrt{R^2-Rvt\sqrt{3}+v^2t^2}$ (см. рис. 2, *а*).

А. С. Розенберг

◆

Для решения задачи рассмотрим такую модель. Над диэлектрической пластиной, имеющей форму квадрата со стороной a и заряженной с поверхностной плотностью заряда ρ, натянута диэлектрическая заряженная нить длины $l=a$ с линейной

Ф1010. *Две диэлектрические заряженные нити бесконечной длины расположены в пространстве как две скрещивающиеся перпендикулярные прямые. Линейная плотность* *зарядов на нитях σ. Найти силу взаимодействия нитей. Считать, что нити очень тонкие и перераспределение зарядов не происходит.*



плотностью заряда σ. Нить параллельна стороне квадрата и находится на высоте r ($r \ll a$) от него (см. рисунок).

Разобьем плоскость на очень тонкие полоски шириной Δx такие, что

$$\Delta x \cdot \rho = \sigma \Rightarrow \Delta x = \sigma/\rho$$

(каждая полоска не что иное, как «нить» с линейной плотностью заряда σ). Так как $r \ll a$, можно считать, что сила f, с которой каждая полоска действует на нить, одна и та же. Эта сила и есть искомая в задаче величина. Найдем ее.

Сила F, с которой действует плоскость на нить, равна

$$F = 2\pi k\rho \cdot \sigma l$$

(поскольку $r \ll a$); с другой стороны,

$$F = \sum f = f\frac{a}{\Delta x} = f\frac{l}{\Delta x} = fl\frac{\rho}{\sigma}.$$

Из этих двух соотношений находим f:

$$f = 2\pi k\sigma^2 = 2\pi\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}.$$

И. В. Шутовский

◆

Ф1011. *Воздушный шар, подъемная сила которого создается горячим воздухом, устроен так, что объем его обогреваемой камеры практически постоянен, а давление в ней равно внешнему давлению, так как камера в нижней своей части сообщается с атмосферой. Обогрев в камере производится постоянно для компенсации теплоотдачи в окружающую среду. Такой шар при постоянной мощности нагревателя плавает в атмосфере на определенной высоте. На сколько изменится высота плавания, если при увеличении мощности нагревателя средняя температура воздуха в камере увеличится на $\Delta t = 0,1$ °C от начальной температуры $t = 57$ °C? Температура окружающей среды $t_0 = 17$ °C.*

Условие плавания воздушного шара на некоторой высоте

$$mg + \rho Vg = \rho_0 Vg, \qquad (1)$$

где m — масса оболочки воздушного шара и грузовой кабины, ρ — плотность горячего воздуха, ρ_0 — плотность атмосферного воздуха на высоте плавания шара, V — объем камеры, g — ускорение свободного падения.

Из (1) следует, что на новой высоте равновесие будет возможным, если величины ρ и ρ_0 изменятся так, что

$$\Delta\rho = \Delta\rho_0, \qquad (2)$$

где $\Delta\rho_0$ — изменение плотности атмосферного воздуха, $\Delta\rho$ — изменение плотности горячего воздуха в камере.

При небольших изменениях высоты давление уменьшается с увеличением высоты (Δh) на

$$\Delta p = \rho_0 g \cdot \Delta h.$$

Поскольку температура атмосферы остается постоянной, для плотности атмосферного воздуха на разных высотах имеем:

$$\frac{\rho_0 - \Delta\rho_0}{\rho_0} = \frac{p_0 - \Delta p}{p_0},$$

откуда

$$\Delta\rho_0 = \rho_0\frac{\Delta p}{p_0} = \rho_0^2\frac{g}{p_0}\Delta h. \qquad (3)$$

Плотность горячего воздуха в камере изменится за счет изменения температуры и давления:

$$\Delta\rho = \frac{p_0\mu}{RT} - \frac{(p_0 - \Delta p)\mu}{R(T + \Delta T)} =$$

$$=\frac{\mu(p_0\cdot\Delta T+\Delta p\cdot T)}{R(T+\Delta T)}=\frac{p_0\mu\left(\frac{\Delta T}{T}+\frac{\Delta p}{p_0}\right)}{RT\left(1+\frac{\Delta T}{T}\right)},$$

и так как $\frac{\Delta T}{T}\ll 1$,

$$\Delta\rho\approx\frac{p_0\mu}{RT}\left(\frac{\Delta T}{T}+\frac{\Delta p}{p_0}\right). \quad (4)$$

Подставляя (3) и (4) в (2), находим:

$$\Delta h=\frac{RT_0^2\cdot\Delta T}{\mu gT(T-T_0)}\approx 18 \text{ м}.$$

Е. Н. Юносов, И. В. Яминский

◆

Ф1012. *Торец длинного стеклянного цилиндра радиуса R закрыт светонепроницаемой пластинкой, в которой имеется вертикальная щель; ширину d щели можно менять. На пластинку под углом α падает пучок параллельных световых лучей (рис. 1); освещенность пластинки E. У противоположного торца цилиндра находится фотоэлемент. Построить график зависимости светового потока, принимаемого фотоэлементом, от ширины щели d. Показатель преломления стекла n.*

После преломления на торце цилиндра лучи будут распространяться в стекле под углом β к оси системы таким, что

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=n.$$

Рассмотрим лучи, лежащие в одной вертикальной плоскости на расстоянии x от оси цилиндра (рис. 2, 3). Точки, в которых все эти лучи будут падать на границу стекло — воздух, лежат на одной прямой — на образующей AB,— и условия преломления и отражения этих лучей на границе будут одинаковыми. Вычислим угол γ, под которым лучи падают на границу AB, и сравним его

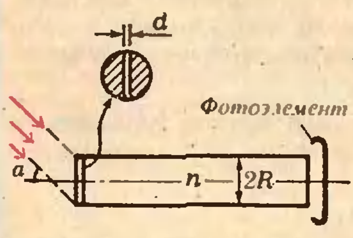


Рис. 1.

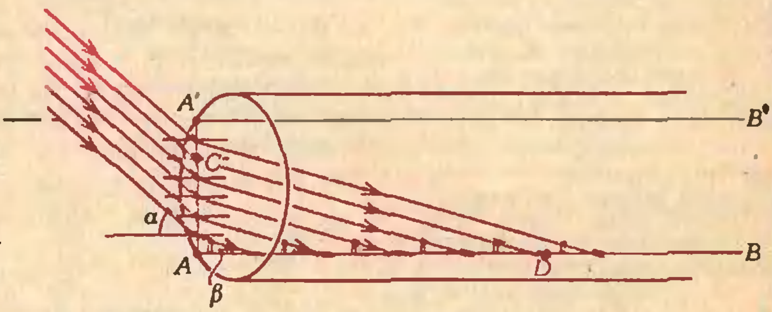


Рис. 2.

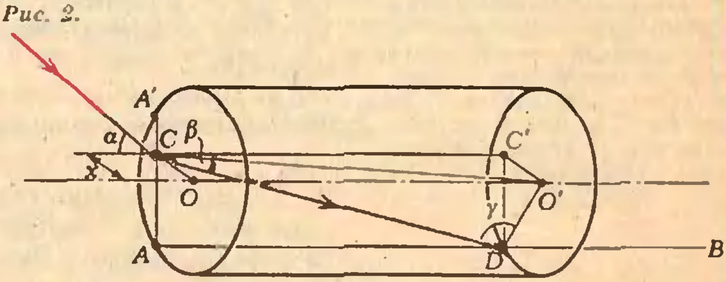


Рис. 3. В треугольнике $CC'D$ $|CC'|=l$,

$$|C'D|=l\,\mathrm{tg}\,\beta,\ |CD|=\frac{l}{\cos\beta}.$$

В треугольнике $CC'O'$

$$|CO'|=\sqrt{l^2+x^2}.$$

с предельным углом полного внутреннего отражения.

Рассмотрим ход луча CD, лежащего в плоскости $AA'B'B$. Проведем через точку C прямую, параллельную прямой AB (и оси цилиндра), и отложим на ней отрезок $|CC'|=|AD|=l$ (рис. 3). По теореме косинусов из треугольника $CO'D$ имеем:

$$|CO'|^2=|CD|^2+|DO'|^2-2|CD|\,|DO'|\cos\gamma,$$

или

$$l^2+x^2=\frac{l^2}{\cos^2\beta}+R^2-2\frac{lR}{\cos\beta}\cos\gamma. \quad (1)$$

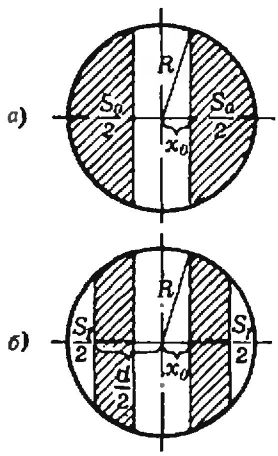


Рис. 4. а) Заштрихованная область определяет световой поток на фотоэлементе при $d=2R$. Площадь заштрихованных участков —

$$S_0=2R^2\arccos\frac{x_0}{R}-2x_0\sqrt{R^2-x_0^2}.$$

б) Площадь «рабочей» области —

$$S=S_0-S_1=$$
$$=2R^2\arccos\frac{x_0}{R}-$$
$$-2x_0\sqrt{R^2-x_0^2}-$$
$$-2R^2\arccos\frac{d}{2R}+$$
$$+d\sqrt{R^2-\frac{d^2}{4}}.$$

Из треугольника $C'O'D$ имеем:

$$|C'D|^2+|C'O'|^2=|O'D|^2,$$

или

$$l^2\,\mathrm{tg}^2\,\beta+x^2=R^2. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) находим:

$$\cos\gamma=\frac{\sqrt{R^2-x^2}}{R}\sin\beta=\frac{\sqrt{R^2-x^2}}{R}\,\frac{\sin\alpha}{n}. \qquad (3)$$

Физический смысл (3) достаточно ясен — с ростом x величина $\cos\gamma$ уменьшается, следовательно, $\sin\gamma$ растет, и при некотором x_0 угол γ достигает значения предельного угла полного внутреннего отражения $\gamma_0=\arcsin\frac{1}{n}$. Определим, с какого x_0 выполняется условие $\sin\gamma_0=\frac{1}{n}$:

$$\frac{1}{n}=\sqrt{1-\cos^2\gamma_0}=\sqrt{1-\frac{(R^2-x_0^2)}{R^2}\frac{\sin^2\alpha}{n^2}},$$

откуда

$$x_0^2=R^2\left(\frac{1+\sin^2\alpha-n^2}{\sin^2\alpha}\right). \qquad (4)$$

Итак, для всех лучей, падающих на торец цилиндра на расстоянии $x\geqslant x_0=\frac{R}{\sin\alpha}\sqrt{1+\sin^2\alpha-n^2}$ от вертикального диаметра торца, при первом падении луча на боковую поверхность цилиндра выполняется условие полного внутреннего отражения. (Из (4), в частности, следует, что при $n^2=1+\sin^2\alpha$ это условие выполняется для всех лучей ($x_0=0$).)

Если при первом падении луча на границу стекло — воздух он испытывает полное внутреннее отражение, то при всех последующих падениях на границу он также будет испытывать полное внутреннее отражение; если же при первом падении на эту границу условие полного внутреннего отражения не выполняется, то и в дальнейшем оно не будет выполняться. (Покажите это самостоятельно.) Таким образом, в отсутствие светонепроницаемой пластины на фотоэлемент попадают лучи, которые падают на входной торец в области, заштрихованной на рисунке 4, *а*. При наличии пластинки со щелью лучи не попадают в фотоэлемент, если ширина щели $d<2x_0$. Если $2R\geqslant d>2x_0$, световой поток, принимаемый фотоэлементом, определяется лучами, которые падают на входной торец в области, заштрихованной на рисунке 4, *б*. Величина потока пропорциональна площади заштрихованной области.

Итак: при $d\leqslant 2x_0$ $\Phi=0$; при $2R\geqslant d\geqslant 2x_0$

$$\Phi=E\left(S_0-2R^2\arccos\frac{d}{2R}+d\sqrt{R^2-\frac{d^2}{4}}\right),$$

где

$$S_0=2R^2\arccos\frac{x_0}{R}-2x_0\sqrt{R^2-x_0^2}=\mathrm{const}$$

при данных значениях R, α и n (см. (4)).

А. А. Лапидес

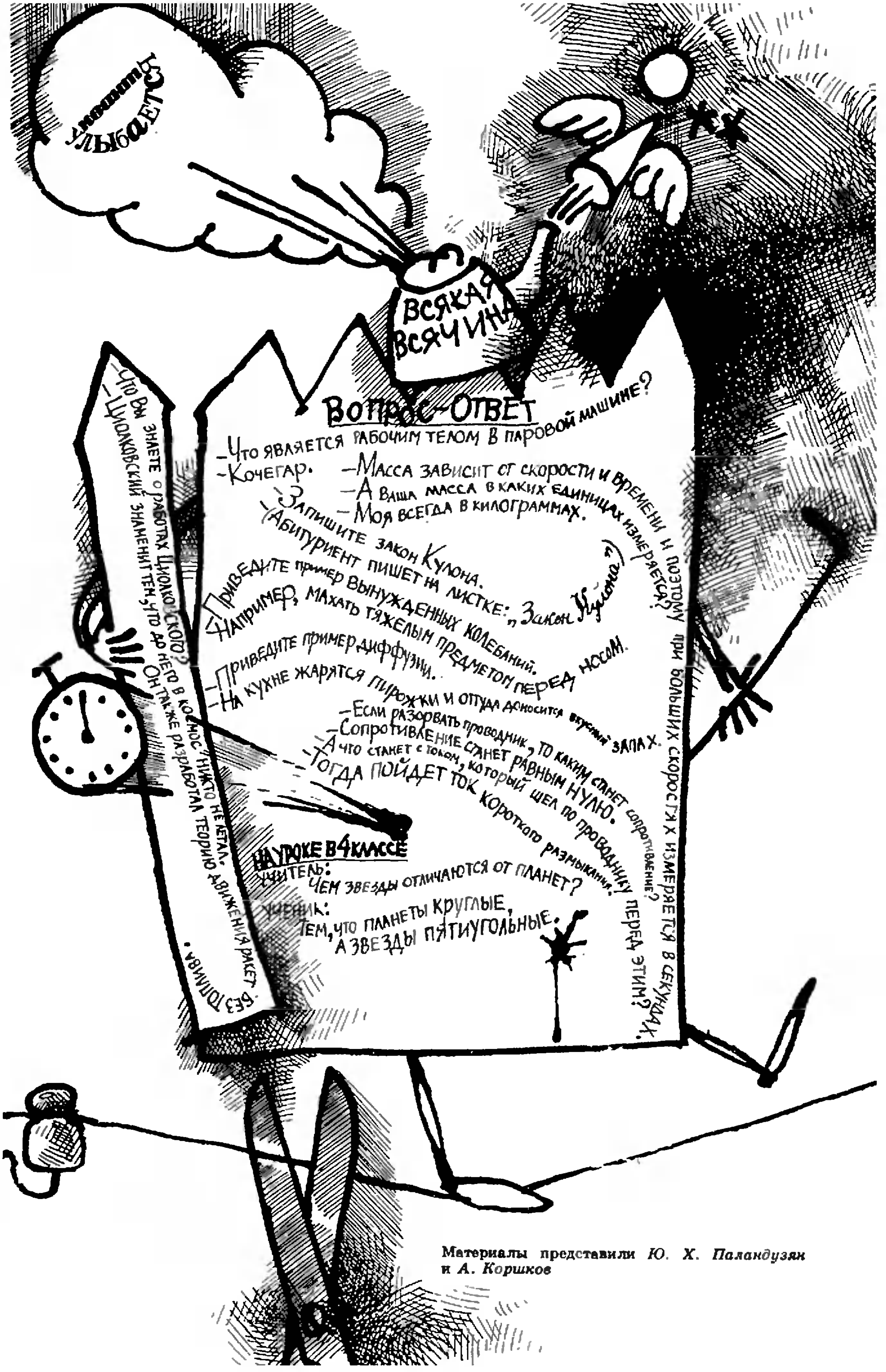
Список читателей, приславших правильные решения

Большинство читателей, приславших решения задач М971—М985, Ф983—Ф997, справились с задачами М971, М973, М974, М976, М977, М981, М984, Ф984, Ф987, Ф988, Ф992—Ф994, Ф996. Ниже мы публикуем фамилии тех, кто прислал правильные решения остальных задач (цифры после фамилии — последние цифры номеров решенных задач).

Математика

Н. Азамов (с. Балыкчи Андижанской обл.) 72, 78, 79, 83; *В. Акопян* (Ереван) 72; *А. Алексейчук* (Одесса) 72; *М. Альт* (Одесса) 72; *Ф. Арзыкулов* (с. Балыкчи Андижанской обл.) 82; *Д. Ароцкер* (Киев) 72, 78; *С. Аршава* (Северодонецк) 72, 82, 83; *Р. Асадуллаев* (Масаллы) 72; *Т. Ахмедов* (п. Борадыгях АзССР) 72; *В. Базуткин* (Кривой Рог) 82, 83; *И. Баль* (Алма-Ата) 72; *А. Барабанов* (Киев) 72, 78 — 80, 82, 85; *И. Белозеров* (Серпухов) 72, 75, 82; *Д. Берзин* (Калуга) 72, 78—80, 83, 85; *В. Беринде* (Байа Маре, СРР) 72; *М. Бона* (Секешфехервар, ВНР) 72; *Е. Бугаев* (Москва) 72; *И. Бугрий* (Киев) 72; *А. Бурштейн* (Киев) 72, 75; *В. Быков* (Киев) 72; *С. Вакарин* (Киев) 82; *Я. Варшавский* (Харьков) 72, 75, 78, 79, 82, 83, 85; *А. Вдовина* (Хмельницкий) 72; *В. Верзаков* (Рудный) 72, 83; *А. Винцюк* (Киев) 72; *С. Волков* (Нижний Тагил) 83, 85; *Б. Вологодский* (Омск) 72, 75, 78, 79, 82, 83, 85; *П. Вольфбейн* (Киев) 72, 78; *Т. Гамидов* (п. Борадыгях АзССР) 72, 82; *Ш. Гасанов* (п. Ярдымлы АзССР) 72, 78; *О. Геворков* (Тбилиси) 72, 78, 83; *Р. Гендлер* (Ташкент) 72, 78, 79, 82, 83; *О. Геупель* (Дрезден, ГДР) 78; *А. Глазовский* (Ярославль) 83; *А. Глущюк* (Харьков) 72, 78, 79, 82, 83, 85; *Ю. Гнатюк* (Каменец-Подольский) 72, 78; *М. Гольдшейд* (Челябинск) 72, 75, 78—80, 82, 85; *И. Гончаров* (Павлоград) 72, 75, 83; *А. Гороховский* (Киев) 72, 78—80, 82, 83; *В. Гравит* (Северодвинск) 72, 83, 85; *Р. Гринив* (Львов) 72, 75, 78, 79, 83; *Д. Грънчаров* (София, НРБ) 83; *А. Давыдов* (с. Елфимово Горьковской обл.) 72, 82; *Р. Дадашов* (п. Борадыгях АзССР) 72; *Ш. Дадашов* (п. Борадыгях АзССР) 72; *А. Даниленко* (Волгоград) 72; *З. Джабиева* (с. Махмудавар АзССР) 72; *Д. Джавадов* (с. Махмудавар АзССР) 72; *О. Джавадов* (п. Борадыгях АзССР) 72; *М. Долаберидзе* (Тбилиси) 72; *А. Донченко* (Киев) 75, 82; *Э. Досиев* (Баку) 72; *Ю. Дрозд* (Киев) 72, 83; *И. Дынников* (Жуковский) 78, 79, 82, 85; *Г. Дятлов* (Новосибирск) 72; *Е. Егоров* (Пенза) 83; *С. Железовская* (Саратов) 80; *Д. Зайцев* (Киев) 72, 75, 78—80, 82, 83, 85; *Н. Зарубин* (Харьков) 72; *Б. Зон* (Харьков) 72, 82; *Н. Исаева* (Павлодар) 72; *А. Калинин* (Саратов) 72, 82; *В. Кальницкий* (Калининград) 82; *Е. Камышная* (Павлодар) 72; *Ю. Карцев* (Ульяновск) 83; *Т. Касумов* (Баку) 72, 82, 83; *О. Кирнасовский* (Винница) 83; *А. Козинский* (Гайворон) 78, 82, 83; *В. Колега* (Червоноград) 82; *Г. Колесников* (Магнитогорск) 72; *Д. Коноваленко* (Севастополь) 72, 75, 78, 80; *А. Кононенко* (Киев) 72, 79, 83, 85; *Ю. Королев* (Казань) 72, 83, 85; *А. Коршиков* (Мозырь) 72, 78, 82, 83; *А. Корытько* (Киев) 72; *Б. Кругликов* (Харьков) 72, 75, 78, 79, 82, 83; *О. Кузнецова* (Йошкар-Ола) 78, 83; *М. Кукс* (Львов) 72, 75, 80; *Д. Куцемако* (Саратов) 83; *И. Кучугурин* (Новый Уренгой) 82; *Н. Кушлевич* (Москва) 72; *С. Лакатош* (Москва) 80, 83, 85; *О. Лимешко* (Куйбышев) 78—80, 82, 83; *М. Литвинов* (Киев) 72, 75, 78—80, 82, 83, 85; *А. Лобковский* (п. Черноголовка Московской обл.) 78, 89; *В. Лысов-Чайников* (Донецк) 72; *В. Ляндин* (Белорецк) 72, 75, 78, 79, 82, 83; *М. Макичян* (Ереван) 78, 79; *А. Макогон* (Киев) 83; *И. Максин* (Ташкент) 72; *Р. Малендевич* (Волехов) 83; *А. Маркосян* (Ереван) 72; *И. Мартинес* (Киев) 72; *А. Мельник* (Гайворон) 82, 83; *А. Мельцер* (Ленинград) 72, 78, 82, 83; *А. Мигло* (Ленинград) 78, 82; *Г. Минасянц* (Ереван) 72; *В. Молчанов* (Астрахань) 72, 79; *Ю. Молчанов* (Мурманск) 82, 85; *З. Мустафаев* (Баку) 72; *Я. Мустафаев* (Баку) 72; *С. Мушинский* (Новосибирск) 72, 75, 79, 80, 82, 85; *А. Назарян* (Тбилиси) 72, 75, 79, 82; *И. Нарский* (Воронеж) 79, 82; *С. Несторов* (Пловдив, НРБ) 72; *Ю. Никоноров* (с. Михайловка КазССР) 78, 79, 82; *О. Ниц* (Одесса) 72, 78, 82, 85; *А. Нумитов* (Ташкент) 79; *В. Окунев* (Арзамас) 72, 78; *О. Острожанский* (Харьков) 72; *М. Панков* (Львов) 72, 78; *Ю. Пастухов* (Витебск) 82, 83; *Р. Пащенко* (Белгород) 72, 78, 79; *О. Пелевин* (Кострома) 72, 78; *Г. Пельц* (Одесса) 72; *А. Пиковский* (Киев) 78, 79, 82, 83; *А. Покровский* (Киев) 72, 75, 78—80, 82, 83, 85; *В. Полинов* (Магнитогорск) 72, 78, 82; *А. Полищук* (Москва) 79; *И. Портной* (Одесса) 72, 78, 79, 82, 83, 85; *В. Процак* (Киев) 72; *В. Пушня* (Харьков) 72, 75, 78, 79, 82, 83; *В. Рагулин* (Челябинск) 72, 75, 78, 83; *С. Резнов* (Киев) 72, 78, 83; *О. Ринк* (Вольск) 78, 79, 83; *А. Ройтерштейн* (Ленинград) 72, 78, 79, 82, 83; *Т. Руденко* (Киев) 78, 82, 83; *Д. Румынин* (Красноярск) 78, 79, 83; *Э. Сайдаматов* (п. Кук-Терек Ташкентская обл.) 72; *И. Самовол* (Гайворон) 78, 82, 83; *Г. Сакжийн* (Улан-Батор, МНР) 72; *В. Сафонов* (Челябинск) 82, 85; *Д. Семинихин* (Киев) 72, 78—80, 82, 83; *С. Сильвестров* (Киев) 72, 75, 78—80, 82, 83; *А. Синицкий* (Гатчина) 72; *М. Скворцов* (п. Черноголовка Московской обл.) 72; *В. Слитинский* (Киев) 75, 78, 79, 83; *С. Смирнов* (Ленинград) 72, 75, 78—80; *Соел-Эрдене* (Улан-Батор, МНР) 72; *М. Соколова* (Ленинград) 83; *В. Соловьев* (п. Купавна Московской обл.) 72, 75; *И. Соловьев* (п. Черноголовка Московской обл.) 72, 78, 79, 83, 85; *И. Солтан* (Павлодар) 72; *С. Стафеев* (Петрозаводск) 72; *М. Стоенеску* (Брашов, СРР) 82; *В. Столин* (Вильнюс) 83; *А. Струнин* (Ярославль) 75, 79, 82, 83; *А. Ступин* (Саратов) 83; *К. Стыркас* (п. Черноголовка Московской обл.) 72, 78, 79, 82, 83, 85; *Д. Тамаркин* (Горький) 78, 79, 82, 83; *Л. Тамаркин* (Горький) 75; *А. Тарасенко* (Днепропетровск) 72, 78, 79; *Б. Татиевский* (Киев) 72, 83; *Е. Творун* (Павлодар) 72; *А. Терехов* (Алма-Ата) 72, 83; *И. Терехов* (п. Протвино Московской обл.) 72, 83; *Г. Топровер* (Волгоград) 78; *Д. Туляков* (Жданов) 78, 82, 83; *В. Тумаркина* (Винница) 72; *И. Устиловский* (Москва) 72, 75, 79, 82, 83; *Ф. Фот* (Томск) 78, 79, 82, 83; *В. Фрасинич* (Гайворон) 78, 82, 83; *Д. Хаджиев* (Стара Загора, НРБ) 78; *М. Хованов* (Москва) 72, 78, 83; *Д. Хосид* (Алма-Ата) 79; *О. Христенко* (Караганда) 82, 83; *А. Христова* (Силистра, НРБ) 78; *С. Черенков* (Апрелевка) 72; *Е. Черная* (Днепродзержинск) 72, 75, 78—80, 82, 83, 85; *И. Чирашня* (Ташкент) 72; *Т. Чудиновских* (Целиноград) 72, 82; *Е. Чулан-Батор* (Улан-Батор, МНР) 72; *К. Чурашев* (Новосибирск) 72; *Е. Чурикова* (Целиноград) 72, 75, 82; *С. Шамаева* (Фрунзе) 82; *Ю. Шамрук* (д. Но-

(Продолжение см. на с. 42)



Материалы представили *Ю. Х. Паландузян* и *А. Коршков*

Бинарный алгоритм

Кандидат физико-математических наук
Г. А. ГАЛЬПЕРИН,
кандидат физико-математических наук
А. В. КОРЛЮКОВ

Алгоритм Евклида нахождения наибольшего общего делителя (НОД) двух чисел изложен в седьмой книге его «Начал» (около 300 г. до н. э.). Многие ученые предполагают, что он является интерпретацией алгоритма, предложенного Евдоксом (около 375 г. до н. э.). Так или иначе алгоритм Евклида можно назвать «дедушкой» всех алгоритмов, поскольку это самый первый нетривиальный алгоритм, доживший до наших дней *). Эту честь могли бы, пожалуй, оспаривать вавилонские методы решения некоторых систем квадратных уравнений с двумя неизвестными, появившиеся за полтора тысячелетия до Евклида. Однако они не выдерживают сравнения с алгоритмом Евклида, поскольку в них не содержится итераций и поскольку они были вытеснены современными алгебраическими методами.

Как сказано в статье, цитированной в сноске, «большинство древних алгоритмов со временем вытеснялось из вычислительной практики более новыми алгоритмами. Алгоритм Евклида избежал этой участи прежде всего благодаря своей экономности». Тем более удивительно, что хотя почтенный алгоритм Евклида и применяется в течение столь многих столетий, он (как будет показано ниже) не всегда является наилучшим способом для нахождения НОД!

Примерно в 1962 г. Роланд Силвер и Джон Терзиан открыли совсем иной алгоритм для нахождения НОД, который прежде всего годится для двоичной арифметики. Этому новому «бинарному» алгоритму совершенно не нужны команды, требующие (как в алгоритме Евклида) выполнения действий деления, а тем более деления с остатком. Основанный на операциях вычитания, бинарный алгоритм еще проверяет, является число четным или нет, и сдвигает вправо двоичное представление четного числа (тем самым выполняя деление пополам).

Бинарный алгоритм очень просто реализуется на микрокалькуляторах и этим выгодно отличается от алгоритма Евклида. Отметим, что реализация алгоритма Евклида на микрокалькуляторах затруднительна: основная трудность состоит в отсутствии операции деления с остатком двух целых чисел. Например, среди 300 приведенных в справочнике В. П. Дьяконова*) программ отсутствует алгоритм Евклида. Отметим еще, что нет в школе общепринятого обозначения для остатка от деления; возможно, по этой причине в учебнике по информатике для 9-го класса при записи алгоритма Евклида предлагается деление с остатком заменять на последовательные вычитания.

Перейдем к описанию *бинарного алгоритма нахождения наибольшего общего делителя* двух целых чисел. Он основан на следующих трех очевидных свойствах НОД:

1. НОД $(2m, 2n)=2\cdot$НОД (m, n).
2. НОД $(2m, 2n+1)=$НОД $(m, 2n+1)$.
3. НОД $(m, n)=$НОД $(m-n, n)$.

По определению НОД, НОД $(m, n)=$НОД (n, m), НОД $(-m, n)=$НОД (m, n), НОД $(0, 0)=0$, НОД $(m, 0)=|m|$. Из свойств 1 — 3 сразу получается алгоритм, который мы опишем словесно, поясняя его на примере нахождения НОД чисел 40 902 и 24 140.

Пусть надо найти НОД (m_0, n_0); обозначим его d. По свойству 1 выделим сначала наибольшую степень двойки 2^k, на которую делятся как m_0 и n_0, так и число d (для чисел 40 902 и 24 140, $k=1$ и $2^k=2$). Уменьшим m_0 и n_0 в 2^k раз, а число 2^k запомним. Получим два числа (20 451 и 12 070), одно из которых (или оба) нечетно (у нас нечетно число 20 451), а НОД этих чисел равен $d_1=d/2^k$. Затем, если одно из этих чисел четно (12 070), то поделим его на максимально возможную степень двойки, оставив второе число без изменения, и в результате получим два нечетных числа m и n

*) Подробно об алгоритме Евклида см. статью С. А. Абрамова в «Кванте», 1985, № 11, с. 44.

*) Справочник по расчетам на микрокалькуляторах.— М.: Наука, 1985.

(20 451 и 6 035) с НОД $(m, n)=d_1$. После этих операций мы пришли к задаче нахождения НОД только для нечетных чисел. При ее решении воспользуемся свойством 3. Вычтем из большего числа меньшее $(20451-6035=14\,416)$, не изменив при этом НОД$=d_1$, а поскольку разность двух нечетных чисел всегда четна, применим свойство 2: сократим эту разность на максимальную степень двойки (в примере на 2^2), получив опять нечетное число (901). Затем снова воспользуемся свойством 3 $(6035-901=5134)$ и один или несколько раз свойством 2 $(5134:2=2567)$, потом опять свойствами 3 и 2, и так далее $(2567-901=1666\to 833\to 901-833=68\to 17\to 833-17=816\to 51\to 51-17=34\to 17)$. После выполнения каждой операции НОД не меняется, а хотя бы одно число пары уменьшается. Поэтому в некоторый момент оба числа станут равными друг другу; очевидно, что оба они в этот момент будут равны d_1. Искомый НОД (m_0, n_0) вычисляется после этого как произведение чисел 2^k и d_1. (Для наших чисел НОД $(40902, 24140)=2\cdot 17=34$.)

В приведенном бинарном алгоритме используются лишь операции вычитания и деления на 2. Последняя особенно проста, если m и n записаны в двоичной системе счисления.

На учебном алгоритмическом языке этот алгоритм может быть записан следующим образом *):

```
алг бинар (цел m, n, k, r, s, d)
  арг m, n
  рез d
нач r:=0, s:=0
пока m≠n
   нц пока m четное
        нц m:=m/2
            r:=r+1
        кц
      пока n четное
        нц n:=n/2
            s:=s+1
        кц
        k:=min {r, s, k}
     пока m>n
        нц m:=m—n
        кц
     пока n>m
        нц n:=n—m
       кц
  кц
  d:=2^k· m
кон
```

*) Если k не определено, при нахождении $\min\{r, s, k\}$ мы считаем, что $\min\{r, s, k\}=\min(r, s)$. Эта маленькая хитрость позволяет раз навсегда определить k: при дальнейшем увеличении r и s k не меняется.

Эту программу нетрудно оттранслировать на языки *Робик* или *Бэйсик* или перевести в коды программируемого микрокалькулятора типа БЗ—34 (см. «Квант», 1986, № 2, 3).

Посмотрим, как следует организовать вычисления по бинарному алгоритму на обычном (не программируемом) калькуляторе. Пусть даны положительные целые числа m и n; вычисление $d=$НОД (m, n) тогда распадается на следующие шаги.

1. Засылаем число m на индикатор и делим его пополам k_1 раз $(k_1\geqslant 0)$, пока не получаем нечетное число m_1.
2. Засылаем число n на индикатор (при этом m_1 сдвигается в ячейку памяти) и делим его пополам k_2 раз $(k_2\geqslant 0)$, пока не получим нечетное число.
3. Если числа в памяти и на индикаторе равны, то k раз удваиваем число на индикаторе, где $k=\min\{k_1, k_2\}$; полученное число и есть d.
4. Если число на индикаторе меньше числа в памяти, то меняем их местами.
5. Выполняем вычитание.
6. Делим число на индикаторе пополам, пока не получится нечетное число и возвращаемся к шагу 3.

Удивительно, что уже при ручном нахождении НОД двух многозначных чисел (например, четырехзначных) проявляется преимущество бинарного алгоритма перед алгоритмом Евклида. Приходится меньше писать, да и ошибки вычислений практически отсутствуют: ведь необходимо только уметь вычитать и делить на 2 (стирать правый нуль в двоичной записи). Правда, число итераций несколько возрастает по сравнению с количеством итераций в алгоритме Евклида, но зато каждая итерация выполняется гораздо проще — совершенно отсутствуют шаги деления. Эта простота позволяет существенно экономить время при нахождении НОД, что видно на следующем примере.

Алгоритм Евклида

НОД (40902, 24140)=34

```
                              40902|24140
                              24140|1
                         24140|16762
                         16762 1
                    16762|7378
                    14756 2
               7378|2006
               6018 3
          2006|1360
          1360 1
     1360|646
     1292 2
  646|68
  612 9
68|34
68 2
 0
```

Бинарный алгоритм

НОД(40902, 24140) $= 2^1 \cdot 17 = 34$

40902 2^1	24140
20451	12070
−6035	6035
14416	−901
7208	5134
901	2567
−833	−901
68	1666
34	833
17	−17
	816
	408
	204
	102
	51
	−17
	34
	17
	−17
	0

Известный математик и программист Д. Кнут, автор многотомного сочинения «Искусство программирования для ЭВМ», сравнивая эти два алгоритма, пишет:

«Таким образом, бо́льшая скорость выполнения итераций в программе, получаемая за счет простоты этих операций, компенсирует рост числа необходимых итераций. Мы обнаружили, что выполнение бинарного алгоритма нахождения НОД на машине MIX примерно на 15 % быстрее, чем выполнение на той же машине алгоритма Евклида; при работе на других машинах ситуация, конечно, может быть иной, но во всяком случае обе программы вполне эффективны. Тем не менее оказывается, что даже такая освященная веками процедура, как алгоритм Евклида, не может противостоять прогрессу...»

Упражнения

1. Найдите по алгоритму Евклида и бинарному алгоритму наибольший общий делитель следующих чисел: 1985 и 1986; 198519851985 и 198619861986; 689168916891 и 589158915891; 27182818284 и 31415926536.

2. Найдите НОД чисел $m = 7 \cdot 2^{18} + 2^{16} + 15 \cdot 2^{11} + 27 \cdot 2^{5}$ и $n = 7 \cdot 2^{15} + 2^{12} + 7 \cdot 2^{8} + 2^{6}$.

3. В 1970 году В. К. Хэррис предложил интересный «гибрид» алгоритма Евклида и бинарного алгоритма. Если $m \geqslant n > 0$ нечетны, то $m = qn + r$, где $0 \leqslant |r| < n$ и r четно. Поэтому если $r \neq 0$, то r делим на максимальную степень 2, пока r не станет нечетным; затем пару (m, n) заменяем на пару $(n, |r|)$ и повторяем этот процесс. Запишите этот алгоритм на учебном алгоритмическом языке. Найдите по этому алгоритму НОД чисел из упражнения 1.

4*. Докажите, что в бинарном алгоритме число вычитаний не превосходит $N = 1 + [\log_2 \max(m, n)]$.

5. Найдите такие значения m и n, при которых по бинарному алгоритму необходимо выполнить ровно N шагов вычитания, где число N взято из упражнения 4.

Список читателей, приславших правильные решения

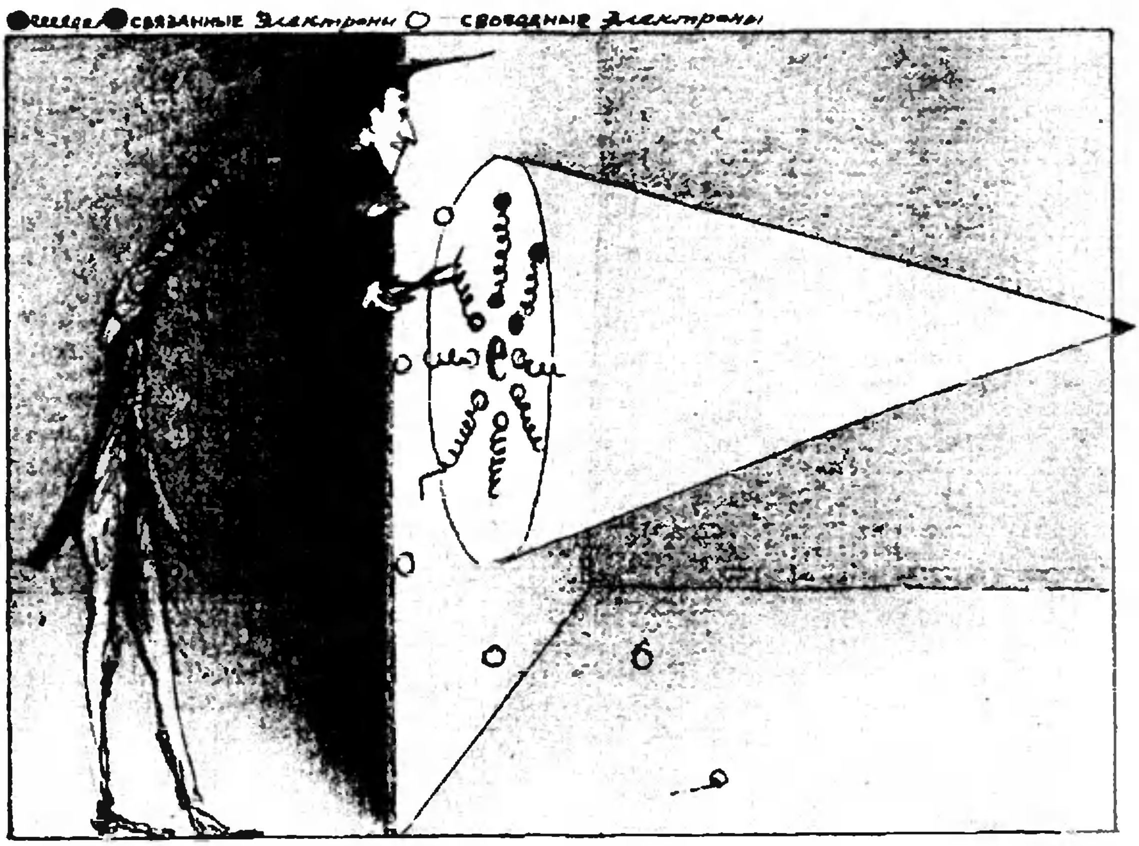
(Начало см. на с. 38)

вый Двор Гродненской обл.) **78, 83**; *А. Шанин* (Москва) **82**; *И. Шефтель* (Ленинград) **78—80, 82, 83, 85**; *М. Шефтер* (Москва) **72**; *И. Шехтман* (Киев) **72**; *С. Шехтман* (Киев) **72**; *Б. Шмуклерман* (Одесса) **72**; *И. Шор* (Киев) **79**; *Н. Шор* (Киев) **72, 75, 78, 79**; *Б. Шраер* (Ленинград) **78, 79, 82, 83**; *О. Щелоков* (Навои) **72**; *Я. Эфендиев* (Баку) **72, 82**; *Г. Юсин* (Киев) **72**.

Физика

О. Азикова (Целиноград) **83, 85, 89, 91, 95**; *Г. Айвазян* (Киев) **83**; *А. Андрианов* (п. Кузнецовск Ровенской обл.) **97**; *А. Антонов* (Москва) **83, 85, 89—91**; *Ф. Асмандьярова* (Целиноград) **83, 85, 89, 91, 95**; *Ю. Белобородов* (Челябинск) **85**; *С. Беловолов* (Новосибирск) **89**; *С. Белоусов* (Ленинград) **89, 91**; *Д. Берзин* (Калуга) **83, 89—91, 95**; *Д. Бисикало* (Винница) **83, 85, 91**; *А. Болотников* (п. Кузнецовск Ровенской обл.) **97**; *Э. Бочаров* (Жуковский) **89**; *А. Брежестовский* (п. Черноголовка Московской обл.) **83, 85, 86, 89, 91**; *Д. Будько* (Белгород) **89—91, 97**; *А. Быцко* (Ленинград) **89, 91, 95, 97**; *М. Ваганов* (п. Черноголовка Московской обл.) **83, 85, 86, 89, 91**; *В. Верзаков* (Рудный) **83, 89**; *Ю. Викторович* (Минск) **83, 89**; *В. Вологодский* (Омск) **95**; *П. Вольфбейн* (Киев) **85, 89—91**; *А. Гаек* (Днепропетровск) **83, 86, 91**; *Д. Галактионов* (Алма-Ата) **89**; *А. Гамаюнов* (Полтава) **91**; *С. Герасимов* (Харьков) **89, 91, 97**; *А. Гольдин* (с. Водяное Львовской обл.) **85, 91**; *Г. Горбатков* (Армавир) **97**; *Г. Горбель* (Арзамас) **89**; *Г. Гриднев* (Тбилиси) **91**; *В. Гурарий* (п. Черноголовка Московской обл.) **83, 85, 86, 89, 91, 95**; *А. Евстигнеев* (Донецк) **84**; *Д. Евтушенко* (Донецк) **85, 89, 90**; *Д. Ежиков* (Минск) **91**; *А. Езерский* (Минск) **97**; *Д. Жильцов* (Краматорск) **83, 91**; *А. Завалковский* (Запорожье) **97**; *П. Задорожный* (Киев) **83, 89—91, 97**; *Д. Изотов* (Ногинск) **97**; *А. Ильенков* (Киев) **83, 85, 89—91**; *В. Ильин* (Саратов) **97**; *М. Исабеков* (Анадырь) **89**; *Д. Исильманова* (Целиноград) **83, 85, 89, 91**; *Б. Казакбаев* (Саратов) **97**; *А. Калашников* (Киев) **97**; *В. Каменькович* (Харьков) **89, 91**; *С. Канатов* (п. Кузнецовск Ровенской обл.) **91, 97**; *А. Капустин* (Москва) **86, 91, 97**; *С. Кардаш* (Лида) **85, 89, 91**; *В. Карстен* (Новокузнецк) **89, 91**; *В. Кирюхин* (п. Черноголовка Московской обл.) **83, 85, 86, 89, 91, 95**; *М. Китаина* (Бобруйск) **91**; *И. Климчук* (п. Кузнецовск Ровенской обл.) **91**; *Ю. Коба* (Тернополь) **91**; *И. Коваленко* (с. Термаховка Киевской обл.) **97**; *С. Конарев* (Баку) **85**; *Д. Концевой* (Могилев) **85, 91**; *А. Коптилов* (Саратов) **89**; *И. Корсунская* (Киев) **83**; *М. Косолапов* (п. Черноголовка Московской обл.) **85**; *В. Кравцов* (Ставрополь) **86, 90, 91**; *Г. Кравченко* (п. Кузнецовск Ровенской обл.) **97**; *Ю. Кравченко* (Москва) **91**; *Б. Крутов* (Воронеж) **85, 91**; *С. Курдюков* (Москва) **83, 86, 89, 91, 97**; *Ю. Левин* (Харьков) **83, 89**; *А. Лобковский* (п. Черноголовка Московской обл.) **83, 85, 86, 89—91**; *И. Лугач* (Винница) **85, 89, 91**; *И. Маресин* (Москва) **85**; *М. Мирошниченко* (Куйбышев) **85, 89**;

(Окончание см. на с. 47)



Атомная физика в задачах

Кандидат физико-математических наук
Ю. А. САМАРСКИЙ

Атомная физика — большой и важный раздел современной физики. Атом — по-гречести «неделимый» — оказался огромным миром, живущим по своим особым законам. Многие современные успехи в науке и ее приложениях были бы невозможны без выяснения сложного строения атома, без открытия новых законов движения микрочастиц — законов квантовой механики.

Из множества вопросов атомной физики в данной статье мы рассмотрим лишь три — фотоэлектрический эффект, дискретность спектров излучения и стабильность атомов. В каждом случае мы прежде напомним основные положения и закономерности, определяющие данное явление, а потом разберем несколько конкретных задач.

* * *

Количественная теория фотоэффекта — эффекта вырывания электронов из вещества под действием света — была создана в 1905 году А. Эйнштейном на основе квантовых представлений о свете. Согласно этим представлениям свет, как и вообще электромагнитное излучение, имеет прерывистую структуру и подобно частицам распространяется в пространстве в виде отдельных порций. Мельчайшую «частицу» электромагнитного излучения назвали квантом, а позднее — фотоном. Энергия фотона E пропорциональна частоте излучения ν:

$$E=h\nu$$

(где $h=6{,}63\cdot10^{-34}$ Дж · с — постоянная Планка) или круговой частоте ω:

$$E=\hbar\omega$$

(где $\hbar=h/(2\pi)$ также называют постоянной Планка).

Уравнение Эйнштейна, или закон сохранения энергии для фотоэффекта, имеет вид

$$h\nu = A_{вых} + E_k,$$

где $A_{вых}$ — работа выхода электрона с поверхности освещаемого вещества, а E_k — кинетическая энергия вылетающего электрона. Минимальная частота облучения, при которой возникает фотоэффект, равна $\nu_{min} = A_{вых}/h$, то есть определяется энергией связи электрона в данной системе.

Так как работа выхода для металлов составляет около двух электронвольт (1 эВ$=1{,}6\cdot10^{-19}$ Дж), то фотоэффект становится возможным при частотах облучения порядка

$$\nu = \frac{2\cdot1{,}6\cdot10^{-19}\ \text{Дж}}{6{,}6\cdot10^{-34}\ \text{Дж}\cdot\text{с}} \approx 0{,}5\cdot10^{15}\ \text{Гц}.$$

Этим частотам соответствуют фотоны в видимой — точнее, красной — области спектра с длиной волны $\lambda = c/\nu \approx 6\cdot10^{-7}$ м (отсюда и название — «красная граница фотоэффекта»).

Важно отметить, что фотоэффект на свободных электронах вообще невозможен. Действительно, предположим, что он все-таки происходит. Для простоты допустим, что свободный электрон до столкновения с фотоном покоился, и запишем законы сохранения импульса и энергии:

$$\frac{h\nu}{c} = mv,\quad h\nu = \frac{mv^2}{2},$$

где v — скорость движения электрона после столкновения с фотоном, c — скорость света. Поделив второе уравнение на первое, получим абсурдный результат: $v = 2c$! Это и означает, что фотоэффект возможен только на связанных электронах. Правда, понятия «связанные» или «свободные» электроны — относительные. Все определяется соотношением между работой выхода электрона (его энергией связи) и энергией падающего излучения. Так, электроны проводимости в металле, где энергия связи порядка нескольких электронвольт, являются связанными по отношению к фотонам видимого света, энергия которых составляет тоже несколько электронвольт. Но те же электроны проводимости по отношению к рентгеновским квантам с энергией несколько десятков килоэлектронвольт будут свободными, и фотоэффект для них будет невозможен.

Задача 1. *Для измерения постоянной Планка катод К вакуумного фотоэлемента освещается монохроматическим светом (рис. 1). При длине волны излучения $\lambda_1 = 6200$ Å (1 Å$=10^{-10}$ м) ток фотоэлектронов прекращается, если между катодом и анодом включить задерживающее напряжение U, не меньшее определенной величины. При увеличении длины волны на 25 % задерживающее напряжение оказалось на $\Delta U = 0{,}4$ В меньше. Определите по этим данным величину постоянной Планка.*

В измерениях используется монохроматический свет двух длин волн: λ_1 и $\lambda_2 = \lambda_1 + 0{,}25\lambda_1 = 1{,}25\lambda_1$. Очевидно, что фототок станет равным нулю, когда задерживающее напряжение будет равно: в первом случае $U_1 = E_{k1}/e$, а во втором $U_2 = U_1 - \Delta U = E_{k2}/e$, где E_{k1} и E_{k2} — кинетические энергии электронов, выбитых падающими фотонами, e — заряд электрона. Уравнение Эйнштейна для фотоэффекта в этих случаях имеет вид

$$\frac{hc}{\lambda_1} = A_{вых} + E_{k1} = A_{вых} + eU_1,$$

$$\frac{hc}{\lambda_2} = A_{вых} + E_{k2} = A_{вых} + e(U_1 - \Delta U).$$

Решая эту систему уравнений, найдем:

$$h = \frac{\lambda_1\lambda_2 e\Delta U}{(\lambda_2-\lambda_1)c} = 5\,\frac{\lambda_1}{c}\,e\Delta U = 6{,}61\cdot10^{-34}\ \text{Дж}\cdot\text{с}.$$

Задача 2. *Найдите длину волны коротковолновой границы непрерывного спектра рентгеновского излучения, если при увеличении напряжения между анодом и катодом рентгеновской трубки в 2 раза длина волны границы изменилась на $\Delta\lambda = 0{,}5$ Å.*

Для возбуждения рентгеновского излучения обычно используют рентгеновские трубки, состоящие из откачанного баллона с двумя электродами: подогревным катодом и анодом. Между катодом и анодом прикладывается разность потенциалов, достигающая обычно нескольких десятков

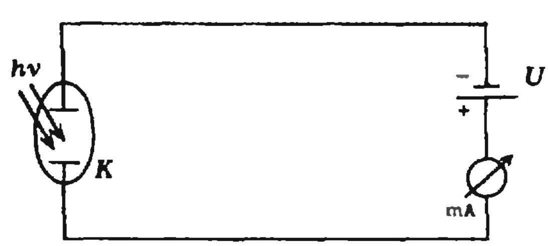


Рис. 1.

киловольт. Ускоренные электроны движутся к аноду и тормозятся у его поверхности. Это торможение и приводит к появлению рентгеновского излучения, называемого тормозным рентгеновским излучением и имеющего сплошной спектр. На рисунке 2 изображены спектры тормозного рентгеновского излучения для двух значений напряжения на трубке. Обрыв спектра в области коротких волн легко объясним: энергия рентгеновских квантов, возникающих при торможении электронов, не может превысить кинетическую энергию этих электронов.

Обозначая через U разность потенциалов на трубке, для длины волны $\lambda_к$ коротковолновой границы получим

$$\frac{hc}{\lambda_к}=eU, \text{ откуда } \lambda_к=\frac{hc}{eU},$$

или для двух значений напряжения:

$$\lambda_{к1}=\frac{hc}{eU_1} \text{ и } \lambda_{к2}=\frac{hc}{eU_2}.$$

Поскольку $U_2=2U_1$, изменение длины волны границы равно

$$\Delta\lambda=\lambda_{к2}-\lambda_{к1}=\frac{hc}{e}\,\frac{U_2-U_1}{U_1U_2}=\frac{1}{2}\,\frac{hc}{eU_1},$$

то есть составляет половину от $\lambda_{к1}$. Отсюда

$$\lambda_{к1}=2\Delta\lambda=1\ \text{Å}.$$

Заметим, что физическая сущность процессов тормозного излучения и фотоэлектрического поглощения одна и та же: в обоих случаях происходит изменение энергии электрона. При испускании фотонов тормозного рентгеновского излучения электрон переходит из состояния с большей энергией в состояние с меньшей энергией, а при фотоэффекте поглощение фотона сопровождается увеличением энергии электрона.

* * *

Квантовые представления позволили объяснить многие явления, происходящие в атоме, и прежде всего — способность атомов поглощать и испускать фотоны лишь с определенной энергией.

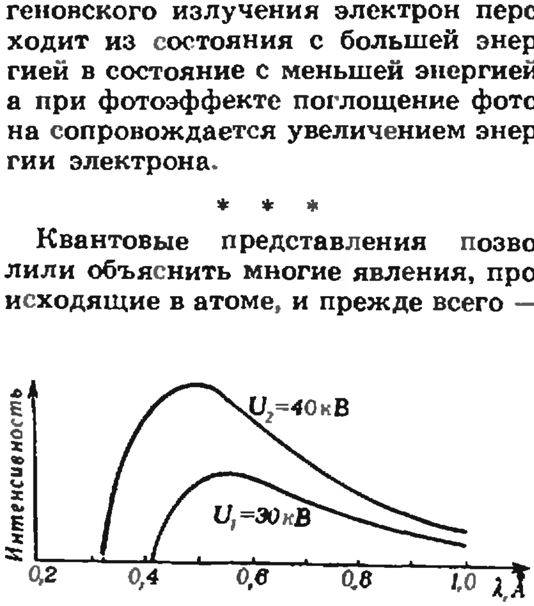


Рис. 2.

Рассматривая одиночный свободный атом водорода, Н. Бор в 1913 году пришел к выводу, что электрон в атоме может обладать только дискретными значениями энергии E_1, E_2, ..., E_n, или, как говорят, находиться на определенных энергетических уровнях. При этом энергия уровней равна

$$E_n=-\frac{me^4}{8h^2\varepsilon_0^2}\,\frac{1}{n^2},$$

где $n=1, 2, ...$ — так называемое главное квантовое число, m — масса электрона, e — его заряд, ε_0 — электрическая постоянная. Каждому уровню энергии соответствует устойчивое (стационарное) состояние атома, в котором атом не излучает и не поглощает. Излучение фотона происходит при переходе атома с уровня с большей энергией на уровень с меньшей энергией. Самый низкий энергетический уровень атома ($n=1$) называется основным, а остальные — возбужденными. При поглощении фотона атом переходит в возбужденное состояние, занимая уровень с большей энергией. Энергия испускаемого (поглощаемого) фотона связана с энергией уровней, между которыми происходит переход, условием

$$E_k-E_n=h\nu_{kn}.$$

Частоты ν_{kn} соответствующих переходов обычно называют спектральными линиями. Подставляя значения E_k и E_n, все спектральные линии водорода можно выразить одной формулой:

$$\nu=\frac{me^4}{8h^3\varepsilon_0^2}\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{k^2}\right),$$

или

$$\frac{1}{\lambda}=R\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{k^2}\right),$$

где константа $R=(me^4)/(8h^3\varepsilon_0^2c)=$ $=10973731\ \text{м}^{-1}$ называется постоянной Ридберга, n и k — целые числа. Спектральную формулу удобно несколько преобразовать для расчета энергии возбуждения атома. Умножим левую и правую части последнего равенства на hc и получим

$$\frac{hc}{\lambda}=Rhc\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{k^2}\right)=E_{ион}\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{k^2}\right), \qquad (*)$$

где $hc/\lambda=h\nu$ — энергия возбуждения атома, а $E_{ион}=Rhc$ — энергия ионизации атома, то есть энергия, соответствующая удалению электрона из атома (переходу с уровня $n=1$ на уровень $k\to\infty$).

Задача 3. *Первоначально невозбужденный водород начинает излучать фотоны, если через него пропустить пучок электронов, прошедших ускоряющую разность потенциалов, не меньшую $U_0=10{,}2$ В. Какую минимальную ускоряющую разность потенциалов должен пройти пучок протонов, чтобы при пропускании их через первоначально невозбужденный водород последний начал излучать фотоны? Чему равна (в электронвольтах) энергия ионизации атома водорода? Считать, что масса электрона много меньше массы протонов; атом водорода перед ударом покоился.*

Минимальная кинетическая энергия E_{min} частицы, налетающей на покоящийся атом и возбуждающей его, определяется из условия абсолютно неупругого взаимодействия частицы и атома, когда после взаимодействия скорость их относительно друг друга равна нулю (покажите его самостоятельно). В этом случае законы сохранения импульса и энергии имеют вид

$$mv_0=(m+M)v,$$

$$E_{min}=\frac{mv_0^2}{2}=eU=\frac{(m+M)v^2}{2}+\Delta E_{возб},$$

где m — масса частицы, M — масса атома, v_0 — скорость налетающей частицы, v — скорость атома и частицы после столкновения, U — ускоряющая частицу разность потенциалов, $\Delta E_{возб}$ — энергия возбуждения атома. Решая эту систему уравнений, получим

$$E_{min}=eU=\left(1+\frac{m}{M}\right)\Delta E_{возб}.$$

В случае бомбардировки атома водорода пучком электронов $m/M\ll 1$, и тогда

$$\Delta E_{возб}=eU_0.$$

Минимальная энергия возбуждения атома водорода связана с переходом его из основного состояния с квантовым числом $n=1$ в состояние с числом $k=2$. Согласно формуле (*) имеем

$$\Delta E_{возб}=E_{ион}\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{k^2}\right)=\frac{3}{4}E_{ион}=eU_0.$$

Отсюда

$$E_{ион}=\frac{4}{3}\Delta E_{возб}=\frac{4}{3}eU_0=13{,}6 \text{ эВ}.$$

В случае бомбардировки атомов водорода протонами, когда $m\approx M$, минимальную ускоряющую разность потенциалов найдем из условия

$$eU_x=\left(1+\frac{m}{M}\right)\Delta E_{возб}=$$

$$=2\Delta E_{возб}=2eU_0=20{,}4 \text{ эВ},$$

или

$$U_x=20{,}4 \text{ эВ}.$$

Легко видеть, что возбуждать атомы водорода тяжелыми частицами энергетически невыгодно.

* * *

Свойство атомов некоторых веществ самопроизвольно испускать ионизирующее излучение называют радиоактивностью, а соответствующие вещества называются радиоактивными. Анализ многочисленных опытов привел к выводу, что радиоактивность есть результат процессов, происходящих внутри атомных ядер и связанных с их сложным строением. Э. Резерфорд первым установил основной закон радиоактивного распада: для каждого радиоактивного вещества существует определенный интервал времени, называемый периодом полураспада T, в течение которого количество радиоактивного вещества убывает в 2 раза. Закон имеет вид

$$N_t=N_0\cdot 2^{-t/T},$$

где N_t — число радиоактивных атомов в произвольный момент времени t, N_0 — их первоначальное количество (при $t=0$).

Задача 4. *В микрокалориметр с теплоемкостью $C=100$ Дж/К помещен образец радиоактивного кобальта с относительной атомной массой $A=61$. Масса образца $m=10$ мг. При распаде одного ядра кобальта выделяется энергия $w=2\cdot 10^{-19}$ Дж. Через время $\tau=50$ мин температура калориметра повысилась на $\Delta t=0{,}06$ °С. Каков период полураспада данного препарата кобальта? Число Авогадро $N_A=6\cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$.*

Повышение температуры калориметра определяется выделением энергии Q в образце при распаде ядер атомов кобальта:

$$C\Delta t=Q=\Delta Nw.$$

Здесь ΔN — число распавшихся ядер за время τ. Это число равно

$$\Delta N = N_0 - N_0 \cdot 2^{-\tau/T} = N_0(1 - 2^{-\tau/T}),$$

где N_0 — первоначальное число радиоактивных атомов. По закону Авогадро $N_0 = N_A m/M$, где $M = A \times 10^{-3}$ кг/моль — молярная масса кобальта. Теперь окончательно получаем

$$C\Delta t = N_A \frac{m}{A \cdot 10^{-3}} \left(1 - 2^{-\tau/t}\right) w,$$

откуда находим период полураспада T:

$$T = \frac{\tau}{\log_{1/2}(1 - (C\Delta t A \cdot 10^{-3})/(N_A w m))} \approx$$
$$\approx 5700 \text{ с} \approx 95 \text{ мин.}$$

Задача 5. *В некоторый момент времени счетчик радиоактивного излучения, расположенный вблизи препарата фтора-18 с малым периодом полураспада, зафиксировал $I_0 = 77$ отсчетов в секунду. Через время $\tau = 14$ мин показания уменьшились до $I_1 = 70$ отсчетов в секунду. Определите период полураспада фтора-18.*

Счетчик радиоактивного излучения регистрирует интенсивность радиоактивного распада, которая определяется скоростью изменения числа нераспавшихся радиоактивных атомов:

$$I_0 = \frac{\Delta N_0}{\Delta t}, \quad I_1 = \frac{\Delta N_1}{\Delta t}.$$

Отсюда, используя закон радиоактивного распада, получаем

$$I_1 = I_0 \cdot 2^{-\tau/T},$$

и период полураспада

$$T = \frac{\tau}{\log_2(I_0/I_1)} \approx 6108 \text{ с} \approx 102 \text{ мин.}$$

Упражнения

1. При освещении фотоэлемента светом с длиной волны $\lambda_1 = 600$ нм его ЭДС $\mathscr{E}_1 = 1{,}2$ В. Какой будет ЭДС $\mathscr{E}_2$ фотоэлемента при облучении светом с длиной волны $\lambda_2 = 400$ нм?

2. Рентгеновское тормозное излучение возникает при бомбардировке быстрыми электронами металлического антикатода рентгеновской трубки. Определите длину волны коротковолновой границы спектра тормозного излучения, если скорость электронов составляет 40 % от скорости света в вакууме.

3. На неподвижный невозбужденный атом водорода налетает другой атом водорода. Какова должна быть минимальная кинетическая энергия налетающего атома, чтобы в результате столкновения мог излучиться фотон? Энергия ионизации атома водорода $E_{\text{ион}} = 13{,}6$ эВ.

4. Ампула с радиоактивным препаратом $^{24}_{11}$Na охлаждается потоком воздуха. В начале опыта воздух нагревался на $\Delta t_1 = 2$ °С, а через время $\tau = 142$ мин — на $\Delta t_2 = 1{,}8$ °С. Каков период полураспада данного препарата?

Список читателей, приславших правильные решения

(Начало см. на с. 38)

Н. Михайловский (Красноярск) 89; *И. Мишенев* (Минск) 97; *Я. Насиковский* (Ровно) 85, 86, 89—91; *А. Недачин* (Киев) 83, 85, 89—91, 95, 97; *А. Никитин* (Тихвин) 83, 89; *Г. Николаишвили* (Тбилиси) 83, 86, 89; *М. Нитишинский* (Красногорск Московской обл.) 85; *А. Нургалеев* (Днепродзержинск) 85, 89; *Д. Орел* (Воркута) 91; *Л. Петько* (Минск) 91, 95; *Г. Побережский* (Омск) 97; *С. Полищук* (Канев) 97; *С. Резнов* (Киев) 83, 91; *А. Розенберг* (Уфа) 91; *А. Розенвайн* (Тарту) 95; *Е. Розпощик* (Киев) 91, 97; *Т. Рокицкая* (Винница) 83; *В. Рубман* (Одесса) 83, 85; *Р. Сагайдак* (с. Матусов Черкасской обл.) 83, 86, 89, 91; *А. Севенюк* (Брест) 97; *С. Сильвестров* (Киев) 91; *А. Служаев* (Димитровград) 91; *Т. Соколовская* (Целиноград) 83, 85, 89, 91, 95; *Д. Соловьев* (Ивано-Франковск) 89; *А. Ставицкий* (Баку) 83, 89; *А. Степура* (Ивано-Франковск) 90, 91; *А. Струнин* (Ярославль) 85, 90, 91; *К. Стыркас* (п. Черноголовка Московской обл.) 83, 85, 86, 89, 91, 95; *В. Суклиян* (Одесса) 97; *С. Сулейменов* (п. Кульсары Гурьевской обл.) 89; *Б. Татиевский* (Ялта) 83, 91; *И. Терехов* (Протвино) 89, 91; *Д. Тильга* (Алма-Ата) 83, 89; *А. Ткаченко* (Киев) 83, 85; *В. Ткаченко* (с. Майма Алтайского кр.) 89, 91; *В. Тягнирядно* (Минск) 89—91; *А. Усинский* (с. Птичья Ровенской обл.) 91; *Г. Финкельштейн* (п. Черноголовка Московской обл.) 83, 85, 86, 89—91, 95; *Б. Фуркал* (Черновцы) 91; *А. Фурс* (п/о Дричин Минской обл.) 90, 91; *П. Хиль* (п. Овидиополь Одесской обл.) 85, 91; *И. Чайка* (п. Кузнецовск Ровенской обл.) 91; *О. Чеников* (Могилев) 86, 89, 91; *Ю. Шапиро* (Бобруйск) 91; *В. Шахмуров* (Баку) 89; *С. Шехтман* (Киев) 83; *Г. Шугай* (Запорожье) 91; *А. Шуляк* (с. Молодецкое Черкасской обл.) 85, 89; *А. Щеглов* (Холмск) 85, 86; *О. Юсухно* (Киев) 89, 91; *В. Ясюченя* (Минск) 86, 89, 91.

XXVII Международная математическая олимпиада

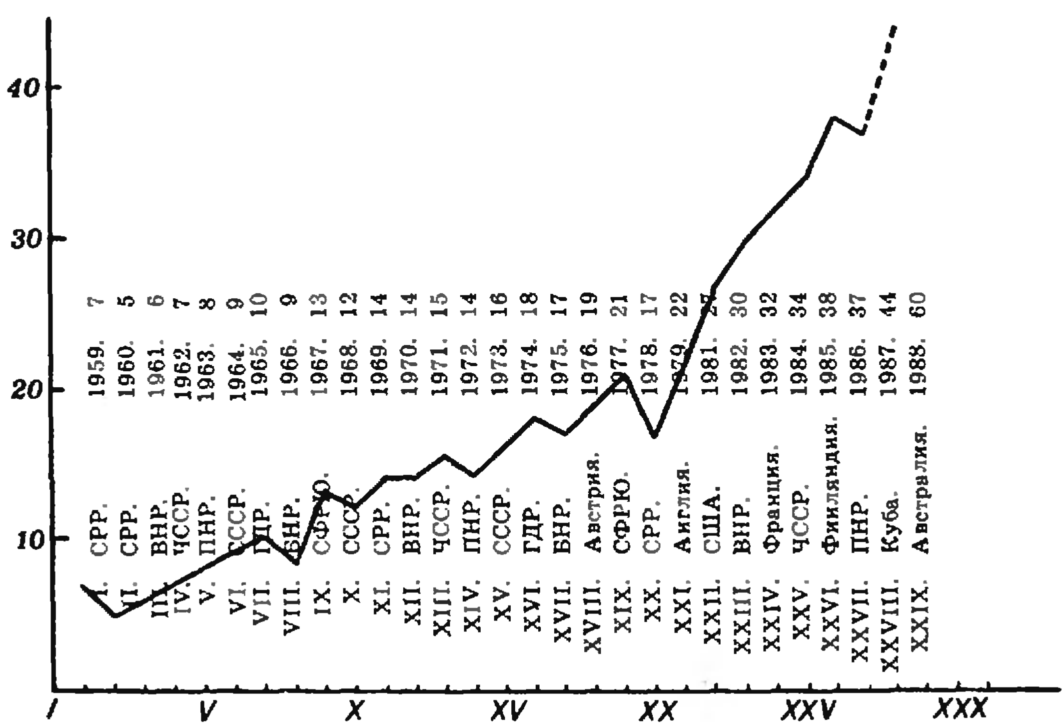
Кандидат физико-математических наук
А. П. САВИН,
Т. А. САРЫЧЕВА,
кандидат физико-математических наук
А. А. ФОМИН

Когда вспоминаешь десять дней, проведенных в Польше на XXVII Международной математической олимпиаде, в памяти возникают улицы и площади возрожденной Варшавы, небольшой домик в парке города Желязова Воля, в котором родился Фредерик Шопен, беседы с руководителями команд (а их в этот раз собралось 37), радости и огорчения во время проверки работ и многое другое.

Но самым ярким впечатлением, наверное, был тот момент во время официального закрытия олимпиады, когда на сцену были вызваны трое лучших участников олимпиады, набравших 42 очка из 42 возможных,— наши Володя Роганов и Слава Смирнов и венгр Куш Гиза. Этот момент вы могли видеть в телевизионной программе «Время».

Кроме них, еще 15 участников, набравших не менее 34 очков, также получили первые премии; 41 участник получил вторые премии (от 26 до 33 очков) и 48 — третьи (от 17 до 25 очков). Специальным призом жюри награжден американский школьник Джозеф Кин за оригинальное решение задачи № 3.

После закрытия олимпиады команды фотографировались на память. Всеобщее внимание привлекло совместное фотографирование двух команд СССР и США, и не только потому, что непринужденное общение этих команд символизировало атмосферу дружбы, царившую на этом празднике математики, но и потому, что они разделили I и II места в неофициальном командном первенстве, набрав по 203 очка.



Следующие места заняли команды ФРГ (196), КНР (177), ГДР (172), СРР (171), НРБ (161), ВНР (151), ЧССР (149), СРВ (146), Великобритании (141), Франции (131), Австрии (127), Исландии (119), Австралии (117), Канады (112), ПНР (93), Марокко (90), Туниса (85), СФРЮ (84), Алжира (80), Бельгии (79), Испании (78), Бразилии (69), Норвегии (68), Греции (63), Финляндии (60), Колумбии (58), Швеции (57), Турции (55), МНР (54), Кипра (53), Кубы (51), Италии (49), Кувейта (48), Израиля (37), Люксембурга (22). В каждой команде было по 6 участников, кроме команд Израиля (4), Испании (4), Италии (3) и Люксембурга (2).

Итак, Володя Роганов и Слава Смирнов, набрав по 42 очка, получили первые премии. Остальные четыре наших участника получили вторые премии, набрав соответственно: Гена Глущенко — 32 очка, Антон Лунин — 31 очко, Сигитас Кярас и Витя Порошин — по 28 очков.

Если попытаться проанализировать выступление нашей команды, то здесь следует отметить традиционно плохое решение самой простой задачи олимпиады (№ 1) и традиционно уверенное решение самых трудных задач (№ 3 и № 6). Вот тексты задач олимпиады.

Первый день

1. Пусть d — положительное целое число, отличное от 2, 5 и 13. Докажите, что во множестве $\{2, 5, 13, d\}$ можно найти два различных числа a и b так, что числа $ab-1$ не является квадратом целого числа.

2. На плоскости даны треугольник $A_1A_2A_3$ и точка P_0. Положим $A_s=A_{s-3}$ для любого целого $s\geqslant 4$. Строим последовательность точек $P_0, P_1, P_2, \ldots$ так, что точка P_{k+1} есть образ точки P_k при повороте вокруг точки A_{k+1} на угол 120° по часовой стрелке ($k=0, 1, \ldots$). Докажите, что если $P_{1986}=P_0$, то треугольник $A_1A_2A_3$ равносторонний.

3. Каждой вершине пятиугольника приписано некоторое целое число так, что сумма всех пяти чисел положительна. Если трем последовательным вершинам соответствуют числа x, y, z и $y<0$, то разрешается следующая операция: числа x, y, z заменяются соответственно на $x+y$, $-y$, $y+z$. Такие операции последовательно совершаются до тех пор, пока хотя бы одно из пяти чисел отрицательно. Определите, обязательно ли этот процесс завершится за конечное количество шагов.

Второй день

4. Пусть A и B — соседние вершины правильного n-угольника ($n\geqslant 5$) с центром O. Треугольник XYZ, конгруэнтный треугольнику OAB, вначале совпадает с ним, потом движется в плоскости n-угольника так, что точки Y и Z остаются на границе, а точка X — внутри данного n-угольника. Какую фигуру опишет точка X, когда точки Y и Z вместе совершат полный оборот по границе n-угольника?

5. Найдите все функции $f(x)$, определенные на множестве неотрицательных действительных чисел, принимающие значения в том же множестве и удовлетворяющие следующим условиям:

(1) $f(xf(y))\cdot f(y)=f(x+y)$ для всех неотрицательных x и y,

(2) $f(2)=0$,

(3) $f(x)\neq 0$ для всех $0\leqslant x<2$.

6. Пусть M — произвольное конечное множество целочисленных точек на координатной плоскости. Всегда ли можно окрасить некоторые точки множества M в белый цвет, а остальные — в красный так, чтобы для каждой прямой L, параллельной любой из координатных осей, абсолютная величина разности между числом белых и красных точек на L не превосходила бы единицы? Ответ обоснуйте.

Во время проведения олимпиады состоялось заседание Международного подготовительного комитета по проведению Международных математических олимпиад под председательством его президента, профессора Московского физико-технического института Г. Н. Яковлева.

На заседании было решено, что в 1987 году олимпиада пройдет на Кубе, а в 1988 г.— в Австралии. На рисунке приведен график количества стран-участниц олимпиад с 1-й по 27-ю и прогноз на следующие два года. Этот прогноз учитывает более широкое представительство латиноамериканских стран на XXVIII олимпиаде и тихоокеанских стран на XXIX.

XXVII Международная математическая олимпиада прошла в атмосфере дружбы и стремления к миру. Недаром из задач, которыми обменивались участники олимпиады, наибольшей популярностью пользовался ребус Харьковского школьника Бори Кругликова:

USA+USSR=PEACE

Представляем команду СССР на XXVII ММО:

Геннадий Глущенко, выпускник школы № 91 г. Запорожье. На Всесоюзных олимпиадах награждался дипломами I степени в 1984, 1985 и 1986 гг. II премия на XXVII ММО.

Сигитас Кярас, выпускник школы № 2 г. Молетай ЛитССР. На Всесоюзных олимпиадах награждался в 1984 г. дипломом II степени, в 1985 г. — I степени, в 1986 г. — II степени. II премия на XXVII ММО.

Г. Глущенко.

С. Кярас.

А. Лунин.

В. Порошин.

В. Роганов.

С. Смирнов.

Антон Лунин, выпускник школы № 57 г. Москвы. На Всесоюзных олимпиадах награждался в 1984 г. дипломом I степени, в 1985 г. — II степени, в 1986 г. — I степени. II премия на XXVII ММО.

Виктор Порошин, выпускник школы № 239 г. Ленинграда. На Всесоюзных олимпиадах награждался в 1984 г. дипломом I степени, в 1985 г.— II степени, в 1986 г. — I степени. II премия на XXVII ММО.

Владимир Роганов, выпускник ФМШ при МГУ. На Всесоюзных олимпиадах награждался в 1985 г. дипломом II степени, в 1986 г. — I степени. I премия на XXVII ММО.

Станислав Смирнов, ученик школы № 239 г. Ленинграда. На Всесоюзных олимпиадах награждался в 1985 г. дипломом I степени, в 1986 г.— II степени. I премия на XXVII ММО.

Возвращаясь к напечатанному

Редакция получила несколько писем, указывающих на «ошибки в алгоритмах», которые читатели увидели в статье В. А. Каймина («Квант», № 10, с. 47). Это дает нам повод остановиться на важном вопросе: какие алгоритмы считать правильными?

Алгоритм назовем *правильным*, если он формирует результаты, строго в соответствии с требованиями (постановки задачи или описания сценария) при любых допустимых исходных данных. Соответственно — алгоритм содержит ошибки, если можно указать такие допустимые исходные данные, при которых будет получен результат, не отвечающий заданным требованиям; либо вовсе не будет получены результаты. При отсутствии четкой постановки задачи говорить о наличии ошибок в алгоритмах или программах не имеет смысла.

Пример неправильного алгоритма действительно можно найти в упомянутой статье: к сожалению, в алгоритме подсчета площади кольца (с. 48) после строки $S2:=\pi\cdot r2^2$ пропущена строка $S:=S1-S2$. В связи с этим редакция приносит читателям свои извинения.

Другое дело — алгоритм приближенного решения уравнения $f(x)=0$ (метод половинного деления, с. 50). В статье (из-за ограниченности объема) не приводится постановка задачи, поэтому формально ставить вопрос о правильности этого алгоритма неправомерно. Отметим, однако, что в авторской постановке было:

Треб: $x0$ — приближенное решение;

Связь: $x1\leqslant x0\leqslant x2$, $|x1-x2|<e$,

$f(x1)\cdot f(x2)\leqslant 0$.

Для этой постановки приведенный алгоритм — правильный. Можно, конечно, ставить задачу иначе, например требовать $|f x\ 0)|<e$, и тогда нужен другой алгоритм. Какая постановка лучше — это уже другой, чисто математический вопрос.

XVII Международная физическая олимпиада

Доктор педагогических наук
О. Ф. КАБАРДИН,
кандидат педагогических наук
В. А. ОРЛОВ

XVII Международная олимпиада школьников по физике проходила в Великобритании с 13 по 20 июля на базе школы Хэрроу в Лондоне. Для участия в олимпиаде прибыли команды из 21 страны: Австрии, Великобритании, ВНР, ГДР, Исландии, Канады, КНР, Кубы, Нидерландов, Норвегии, НРБ, ПНР, СРР, СССР, США, СФРЮ, Турции, Финляндии, ФРГ, ЧССР и Швеции. Впервые в олимпиаде приняли участие команды КНР и США. Кроме того, на олимпиаде были представлены наблюдатели из Австралии, Кувейта и Сингапура.

В команду СССР вошли пять школьников:

Олег Волков — выпускник с. ш. № 23 г. Горького,

Андрей Гущин — выпускник ФМШ № 165 г. Новосибирска,

Андрей Матыцин — выпускник с. ш. № 91 г. Москвы,

Сергей Мягчилов — выпускник с. ш. № 16 г. Одессы,

Григорий Николаишвили — выпускник ФМШ им. Комарова г. Тбилиси.

Руководителями команды были авторы этой статьи — научные сотрудники Научно-исследовательского института содержания и методов обучения Академии педагогических наук СССР.

Организация и проведение олимпиады были поручены Министерству образования и науки, Физическому обществу и коллективу учителей физики школы Хэрроу. Председателем оргкомитета был назначен известный английский ученый сэр Алек Мэррисон, генеральным секретарем — профессор С. Айзенберг.

Оба тура олимпиады — теоретический и экспериментальный — были проведены на базе школы Хэрроу. На решение трех задач теоретического тура было отведено 4,5 часа, двух задач экспериментального тура — 5 часов.

Вот условия этих задач.

Теоретический тур

Задача 1

Плоская монохроматическая световая волна с длиной волны λ и частотой ν падает перпендикулярно на две тождественные узкие щели L и M, находящиеся на расстоянии d друг от друга (рис. 1). Световые волны, исходящие из каждой щели в направлении под углом Θ к нормали, на расстоянии x в момент времени t определяются уравнением

$$y = a\cos(2\pi(\nu t - x/\lambda)),$$

где a — амплитуда, одинаковая для обеих волн, $x \gg d$.

1) Докажите, что результирующую амплитуду A двух волн, выходящих под углом Θ к нормали, можно получить сложением двух векторов, модуль каждого из которых равен a, а направление определяется фазой световой волны. Проверьте геометрически, по векторной диаграмме, что

$$A = 2a\cos\beta, \text{ где } \beta = (\pi d \sin\Theta)/\lambda.$$

2) Двойная щель заменяется дифракционной решеткой, состоящей из N одинаковых щелей, расстояние между которыми одинаково и равно d. Используя векторный метод сложения амплитуд, покажите, что начало и конец каждого вектора лежат на окружности радиуса R, определяемого уравнением

$$R = a/(2\sin\beta),$$

где a — модуль каждого вектора. Покажите, что результирующая амплитуда равна

$$a(\sin N\beta/\sin\beta),$$

и получите разность фаз между результирующей волной и волной, падающей на решетку.

3) Начертите на одном и том же рисунке графики $\sin N\beta$ и $1/\sin\beta$ как функции β. На отдельном графике покажите, как зависит от β интенсивность результирующей волны.

4) Определите интенсивность главных максимумов.

5) Покажите, что число главных максимумов не может превышать $(2d/\lambda)+1$.

6) Покажите, что две волны длиной λ и $\lambda+\Delta\lambda$, где $\Delta\lambda \ll \lambda$, образуют главные максимумы на угловых расстояниях

$$\Delta\Theta = n\Delta\lambda/(d\cos\Theta), \text{ где } n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Вычислите это угловое расстояние для линий натрия, длины волн которых $\lambda = 589{,}0$ нм, $\lambda+\Delta\lambda = 589{,}6$ нм, $n =$ и $d = 1{,}2\cdot 10^{-6}$ м.

Задача 2

В начале этого века была предложена модель Земли, в которой предполагалось, что Земля представляет собой шар радиусом R, состоящий из однородной изотропной твердой оболочки и жидкого ядра радиусом R_c (рис. 2). Скорости сейсмических продольных v_p и поперечных v_S волн, так называемых волн p и S, внутри оболочки постоянны. В ядре продольные волны имеют скорость v_{cp}, а поперечные волны не распространяются. Землетрясение в точке E на поверхности Земли образует

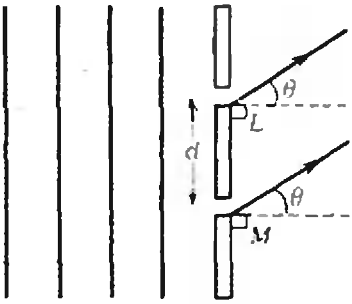


Рис. 1.

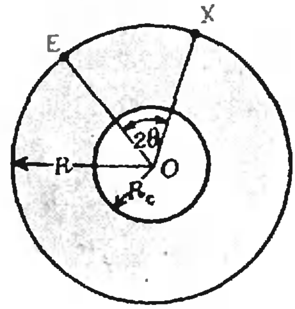


Рис. 2.

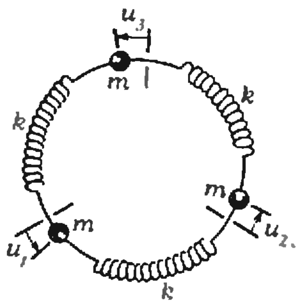


Рис. 3.

сейсмические волны, которые пробегают сквозь Землю и регистрируются на поверхности наблюдателем, который может установить свой сейсмограф в любой точке X земной поверхности. Угловое расстояние между точками E и X равно $EOX = 2\Theta$, где O — центр Земли.

1) Покажите, что сейсмические волны, распространяющиеся только в оболочке по прямой, достигнут точки X за время t (время пробега волны после землетрясения), определяемое по формуле

$$t = (2R\sin\Theta)/v \text{ для } \Theta \leqslant \arccos(R_c/R),$$

где $v = v_p$ для волн p и $v = v_S$ для волн S.

2) Если положение точки X такое, что $\Theta > \arccos(R_c/R)$, то сейсмические волны p достигают наблюдателя после двух преломлений на границе между оболочкой и ядром. Начертите траекторию распространения такой сейсмической волны. Получите соотношение между углом Θ и углом падения i сейсмической волны p на границу между оболочкой и ядром.

3) Используя данные: $R = 6370$ км, $R_c = 3470$ км, $v_p = 10{,}85$ км$\cdot$с$^{-1}$, $v_S = 6{,}31$ км$\times$$\times$с$^{-1}$, $v_{cp} = 9{,}02$ км$\cdot$с$^{-1}$ и результат, полученный в п. 2), начертите качественный график зависимости Θ от i. Прокомментируйте физические последствия формы этой зависимости для наблюдателей, находящихся в различных точках земной поверхности. Нарисуйте графики зависимости времени пробега волн p и S от угла Θ для $0 \leqslant \Theta \leqslant 90°$.

4) После землетрясения наблюдатель измеряет задержку по времени между прибытием волны S вслед за волной p, равную 2 мин 11 с. Определите угловое расстояние, измеренное от центра Земли, между точкой землетрясения и наблюдателем, используя данные п. 3).

5) Наблюдатель, который сделал измерение в п. 4), замечает, что через некоторое время после прибытия волн p и S последовали еще два отсчета на сейсмографе, причем промежуток времени между ними равен 6 мин 37 с. Объясните этот результат и проверьте, что он действительно связан с угловым расстоянием, определенным в предыдущем пункте.

Задача 3

Три частицы массой m соединены упругими нерастянутыми пружинами каждая с жесткостью k и находятся в состоянии равновесия (рис. 3). Их движение ограничено по окружности.

1) Каждая частица смещается из равновесного положения небольшим сдвигом u_1, u_2 и u_3. Составьте уравнения движения для каждой частицы после сдвига. Массами пружин пренебречь.

2) Покажите, что система может совершать гармонические колебания по закону

$$u = a_n \cos\omega t \quad (n = 1, 2 \text{ и } 3)$$

с ускорениями — $\omega^2 u$, где a_n — постоянные амплитуды, и что циклическая частота ω может иметь два возможных значения

$$\omega_0\sqrt{3} \text{ и } 0, \text{ где } \omega_0^2 = k/m.$$

3) Система из пружин и частиц увеличивается до числа N, каждая частица соединена пружинами с двумя соседними. Сначала пружины не растянуты и находятся в равновесном состоянии. Составьте уравнение движения для n-й частицы ($n = 1, 2, 3, \ldots, N$), выраженное через смещение самой частицы, а также соседних частиц после выведения их из положения равновесия. Покажите, что

$$u_n(t) = a_s \sin(2ns\pi/N + \varphi)\cos\omega_s t,$$

(где $s = 1, 2, \ldots, N$, $n = 1, 2, \ldots, N$, φ — произвольная фаза) является решением уравнения движения при условии, что циклическая частота задается выражением

$$\omega_s = 2\omega_0 \sin(s\pi/N),$$

где a_s ($s = 1, \ldots, N$) — постоянные амплитуды, не зависящие от n. Укажите диапазон возможных частот для цепи, содержащей бесконечное число частиц.

4) Определите отношение u_n/u_{n+1} для большого значения N в двух случаях: а) низкочастотные решения; б) $\omega = \omega_{max}$, где ω_{max} — решение для максимальной частоты. Поясните графически расположение частиц в цепи в момент времени t для а) и б).

5) Одну из частиц заменили на частицу с массой $m' \ll m$. Сделайте оценку ожидаемых существенных изменений в распределении циклических частот. Опишите качественно форму частотного спектра для цепи с чередующимися массами m и m' на основе предыдущего результата.

Экспериментальный тур

Задача 1

Пронаблюдайте радуги первого, второго и пятого порядков для воды и радуги первого и второго порядков для жидкостей A и B и определите углы Θ для красных границ этих радуг (рис. 4).

Рассчитайте углы отклонения φ, на которые поворачивается падающий луч света в результате двух преломлений и k отражений от внутренней поверхности капли воды для $k = 1, 2, 5$ (k — порядок радуги). Постройте график зависимости $\varphi(k)$. Определите φ для радуг второго порядка для жидкостей A и B. Постройте график величины $\cos(\varphi/6)$ в зависимости от $1/n$ для всех трех жидкостей. Вставьте дополнительную точку $n = 1$. Соедините точки наиболее точной прямой, измерьте ее наклон, а также величину φ, для которой $n = 2$. Показатели преломления жидкостей известны: $n_{воды}=1,333$; $n_A=1,467$; $n_B=1,534$.

Оборудование: спектроскоп, три шприца, сосуд с водой и две пробирки с жидкостями A и B, три чашки для сбора жидкостей, источник света, черный картон, пластилин, черная лента, два пластиковых квадрата с отверстиями, миллиметровая бумага.

Инструкция

Настройте коллиматор для получения параллельного пучка света. Выньте окуляр из зрительной трубы и с помощью резиновых колец закрепите пластиковые квадраты с отверстиями с обоих концов трубы. С помощью шприца «подвесьте» каплю жидкости над центром стола спектроскопа так, чтобы она полностью находилась в пучке света из коллиматора и была хорошо видна через зрительную трубу. Центральная горизонтальная область капли создает дисперсионные серии (радуги) как результат двух преломлений и k отражений света от внутренней поверхности капли.

Задача 2

Оборудование: микроЭВМ, 10 листов миллиметровой бумаги.

Информация

МикроЭВМ запрограммирована на решение ньютоновых уравнений движения для двумерной системы, состоящей из 25 взаимодействующих частиц в плоскости XY. Система ограничена «ящиком» и в начальный момент времени упорядочена в двумерную «решетку». Частицы, составляющие решетку, идентичны. При эволюции системы положения и скорости частиц изменяются. Если частица уходит за пределы «ящика», программа генерирует новую и впускает ее в «ящик» с противоположной стороны. Скорость новой частицы равна скорости ушедшей. Таким образом, число частиц в «ящике» неизменно. Взаимодействие двух частиц i и j, находящихся на расстоянии R_{ij}, определяется потенциалом U_{ij}.

Для удобства вычислений используются безразмерные величины, полученные делением обычных величин на характерные параметры системы: расстояние R^*, скорость v^*, время t^*, энергия E^*, масса частиц $m^*=48$, потенциал U^*_{ij}, кинетическая энергия $^1/_2 m^* v^{*2}$. ЭВМ позволяет изучать состояние системы в моменты времени $t^*=s\Delta t^*$, где $\Delta t^*=0{,}100000$, $s=0$, 1, 2, ... называют целочисленным временем. Программа позволяет выводить на экран величины:

$$\frac{1}{25}\sum_{i=1}^{25}(v^*_{ix})^n,\ \frac{1}{25}\sum_{i=1}^{25}(v^*_{iy})^n,\ \text{где } n=0,\ 1,\ 2;$$

$$\frac{1}{25}\sum_{i=1}^{25}\sum_{j=1}^{25}U_{ij};\ \frac{1}{25}\sum_{i=1}^{25}(x_i^*(s)-x_i^*(sR))^2,$$

$$\frac{1}{25}\sum_{i=1}^{25}(y_i^*(s)-y_i^*(sR))^2$$

(для удобства ЭВМ давала зависимость не от s, а от $sZ=s-sR$, где sR — заданный параметр времени). Кроме того, можно было изучить распределение молекул по скоростям, получить таблицу зависимости числа молекул ΔN с компонентами скорости, попадающими в данный интервал, от скорости.

Вопросы на вычисления

1) Проверьте, что полный импульс системы сохраняется для последовательности времен $s=0$, 40, 80, 120, 160. Какова точность вычисления?

2) Постройте график зависимости кинетической энергии системы от времени для последовательности времен $s=0$, 2, 4, 6, 12, 18, 24, 30, 50, 70, 90, 130, 180.

3) То же, что в п. 2), для потенциальной энергии.

4) Рассчитайте полную энергию системы для последовательности времен из п. 2). Сохраняется ли энергия системы? Какова точность вычисления полной энергии системы?

5) В начальный момент $s=0$ система не находится в состоянии термодинамического равновесия. По истечении некоторого промежутка времени система достигает такого состояния, при этом полная безразмерная кинетическая энергия флюктуирует в окрестности среднего значения E^*_k. Определите значение E^*_k, а также время достижения системой состояния равновесия.

6) С использованием данных о накопленных частицах (при термодинамическом равновесии) постройте гистограмму зависимости ΔN от безразмерной скорости. Проверьте соотношение

$$\Delta N=A\exp(-24v^{*2}/a),$$

где A и a — постоянные. Определите значение a.

7) Для системы в термодинамическом равновесии рассчитайте среднее значение $R^2(\langle R^2\rangle)$, где R — расстояние по прямой между положениями частицы в фиксированный начальный момент времени sR и в текущий момент времени s. Разница времен $sZ=s-sR$ принимает значения 0, 2, 4, ..., 24. Постройте график зависимости $\langle R^2\rangle$ от sZ в соответствующем интервале значений sR. Вычислите градиент функции в линейной области и укажите временной интервал, для которого этот градиент имеет смысл. Для улучшения точности графика повторите предыдущие вычисления для трех дополнительных значений sR и определите для четырех результирующих наборов среднее $\langle R^2\rangle$, а также линейный градиент и временной интервал. Определите и обоснуйте, в каком агрегатном состоянии (жидком или твердом) находится система при равновесии.

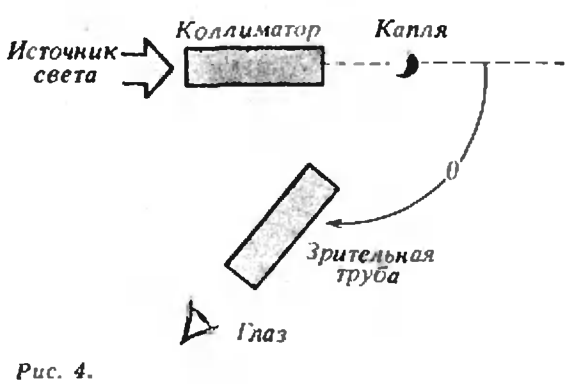
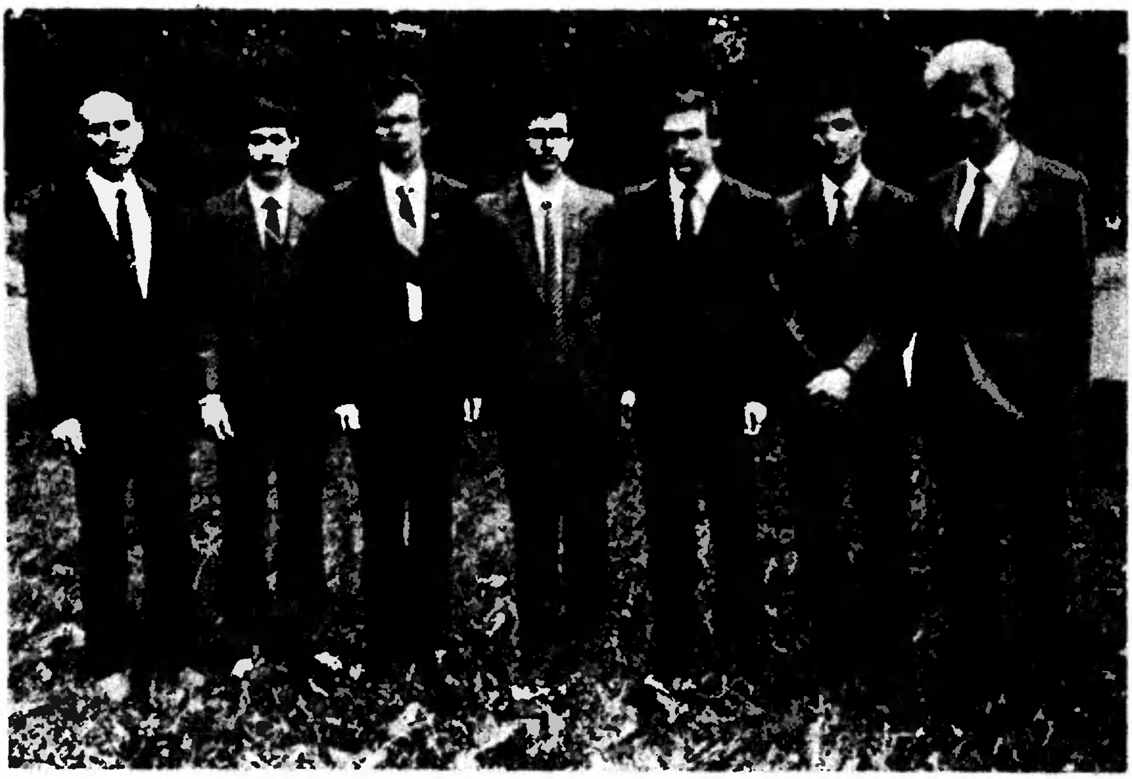


Рис. 4.

Каждая задача теоретического и экспериментального туров оценивалась в 10 баллов.

Наибольшее количество баллов за решение первой теоретической задачи получил румынский школьник К. Некула (9,25), за решение второй теоретической задачи — австрийский



Команда Советского Союза и ее руководители на XVII Международной физической олимпиаде. Слева направо: О. Ф. Кабардин, А. Гущин, О. Волков, А. Матыцин, С. Мягчилов, Г. Николаишвили, В. А. Орлов.

школьник С. Майкстейнер (9,62), третьей теоретической задачи — З. Гагю-Салфю из СРР (8,77). Абсолютно лучший результат за решение задач теоретического тура был у румынского школьника К. Некулы — 25,71 баллов. Второй и третий результаты у советских школьников О. Волкова и А. Матыцина — 24,83 и 24,52 балла соответственно. Лучший командный результат теоретического тура был у команды СССР — 106,82 баллов. У команд СРР и ФРГ, занявших 2 и 3 места, — 98,45 и 87,06 баллов соответственно.

Максимальное число баллов за первую экспериментальную задачу получил советский школьник С. Мягчилов (7,7), за вторую экспериментальную задачу — З. Кантор из ВНР (7,7). Лучший результат за выполнение всего экспериментального задания был у советского школьника С. Мягчилова — 13,9 баллов. Второй и третий результаты — у О. Волкова из СССР — 13,1 баллов и З. Кантора из ВНР — 12,3 баллов. Лучший командный результат за эксперимент у команды СССР — 56,6 баллов, второй и третий результаты у команд ГДР и Великобритании — 44,0 и 40,5 баллов соответственно.

После подведения общих итогов абсолютно лучший результат оказался у советского школьника О. Волкова — 37,93 баллов. Он награжден дипломом I степени.

Такие же дипломы получили С. Мягчилов (СССР) — 35,66, К. Некула (СРР) — 35,31 и А. Матыцин (СССР) — 34,62. Остальные участники советской команды также получили дипломы: А. Гущин — диплом II степени (30,41), Г. Николаишвили — диплом III степени (24,80). Общее число первых дипломов — 4, вторых — 5, третьих — 22.

В неофициальном командном зачете команда СССР завоевала первое место, набрав 163,42 балла. Остальные команды по сумме набранных баллов расположились следующим образом: СРР — 136,95, Великобритания — 125,31, ВНР — 123,92, ФРГ — 121,66, Нидерланды — 118,4, ПНР — 114,9, США — 109,57, ЧССР — 109,34, ГДР — 106,58, НРБ — 92,37, Швеция — 79,81, КНР — 78,93 (три участника), Турция — 78,0, Финляндия — 74,64, Австрия — 69,82, Канада —

67,2, СФРЮ — 62,25, Норвегия — 54,69, Куба — 50,71, Исландия — 31,72 (четыре участника).

О. Волков получил специальный приз за абсолютно лучший результат, С. Мягчилов — за лучшее выполнение экспериментального задания.

На закрытии олимпиады от участников олимпиады слово было предоставлено советскому школьнику Олегу Волкову.

Во время олимпиады ее участникам была предложена интересная культурная программа. Были проведены экскурсии в Королевский институт (в Лондоне), в котором находится музей М. Фарадея, в лабораторию физических и космических исследований им. Э. Резерфорда, на Гринвичскую обсерваторию, в Оксфордский университет. Участники олимпиады посетили парламент, встречались с членом парламента. Во время открытия и закрытия олимпиады силами английских школьников были даны концерты.

Олимпиада прошла в дружеской обстановке.

Редакционная коллегия и редакция журнала «Квант» поздравляют всех членов советской команды с большой победой на XVII Международной физической олимпиаде и желают им дальнейших творческих успехов.

Заочная физико-техническая школа при МФТИ

Заочная физико-техническая школа (ЗФТШ) при Московском ордена Трудового Красного Знамени физико-техническом институте (МФТИ) проводит набор учащихся восьмилетних и средних школ, расположенных на территории РСФСР, в 8, 9 и 10 классы на 1987/88 учебный год.

Цель школы — помочь ученикам в самостоятельных занятиях по углублению своих знаний по физике и математике. При приеме в ЗФТШ предпочтение отдается учащимся, проживающим в сельской местности и рабочих поселках, где такая помощь особенно необходима.

Обучение в школе бесплатное.

Кроме отдельных учащихся, в ЗФТШ принимаются физико-технические кружки, которые могут быть организованы в любой общеобразовательной школе двумя преподавателями — физики и математики. Руководители кружка набирают и зачисляют в них учащихся (не менее 8—10 человек), успешно выполнивших вступительное задание ЗФТШ. Кружок принимается в ЗФТШ, если директор школы сообщит в ЗФТШ фамилии, имя, отчество руководителей кружка и поименный список членов кружка (с указанием класса в 1987/88 учебном году и итоговых оценок за вступительное задание по физике и математике). Все материалы по организации кружка и конверт для ответа о приеме кружка в ЗФТШ с обратным адресом на имя одного из руководителей кружка следует выслать в адрес ЗФТШ (141700, г. Долгопрудный Московской обл., МФТИ, ЗФТШ, «кружок») *до 25 мая 1987 года*. (Тетради с работами членов кружка в ЗФТШ не высылаются.)

Учащиеся ЗФТШ и руководители физико-технических кружков будут получать задания по физике и математике в соответствии с программой ЗФТШ, а также рекомендуемые ЗФТШ решения этих заданий. Задания содержат теоретический материал и разбор характерных задач и примеров по теме, а также 10—14 задач для самостоятельного решения. Это и простые задачи, и более сложные (на уровне конкурсных задач в МФТИ). Работы учащихся-заочников проверяют в ЗФТШ и ее филиалах, а членов кружка — его руководители.

С учащимися Москвы проводятся занятия по физике и математике два раза в неделю по программе ЗФТШ в вечерних консультационных пунктах (в ряде московских школ). Набор в эти группы проводится или по результатам выполнения вступительного задания ЗФТШ, или по результатам очного собеседования по физике и математике (справки по телефону 408-51-45).

Вступительное задание по физике и математике каждый ученик выполняет самостоятельно. Работу надо сделать на русском языке и аккуратно переписать в *одну* школьную тетрадь. Порядок задач должен быть тот же, что и в задании. Тетрадь перешлите в большом конверте *простой* бандеролью (только не сворачивайте в трубку). Вместе с решением обязательно вышлите справку из школы, в которой вы учитесь, с указанием класса. Справку наклейте на внутреннюю сторону тетради. Без этой справки решение рассматриваться не будет. На внешнюю сторону тетради наклейте лист бумаги, заполненный по образцу (все фамилии, имена и отчества в этой анкете должны быть написаны четко печатными буквами в именительном падеже):

1. Область (край или АССР) — *Белгородская область*
2. Фамилия, имя, отчество — *Калинин Андрей Иванович*
3. Класс — *восьмой*
4. Номер, адрес и телефон школы — *Старооскольская средняя школа № 16, т. 5-25-40*
5. Фамилия, имя, отчество вашего преподавателя:
   по физике — *Грищенко Тамара Ивановна*
   по математике — *Иванова Галина Петровна*
6. Профессия родителей и занимаемая должность:
   отец — *электрослесарь*
   мать — *ткачиха*
7. Подробный домашний адрес — *309530, Белгородская обл., г. Ст. Оскол, 12, м-н Жукова, д. 28, кв. 390.*

Внизу начертите таблицу для оценок за вступительное задание:

№ п/п										
Ф.										
М.										

Для получения ответа на вступительное задание вложите в тетрадь конверт с вашим домашним адресом.

Срок отправления решения — *не позднее 1 марта 1987 года* (по почтовому штемпелю места отправления). Вступительные работы обратно не высылаются. Решение приемной комиссии будет сообщено не позднее 1 августа 1987 года.

Тетрадь с выполненными заданиями (обязательно и по физике, и по математике) присылайте по адресу: 141700, г. Долгопрудный Московской обл., Московский физико-технический институт, для ЗФТШ.

Учащиеся Архангельской, Вологодской, Калининской, Калининградской, Кировской, Костромской, Ленинградской, Мурманской, Новгородской, Пермской, Псковской и Ярославской областей, Карельской, Коми и Удмуртской АССР высылают работы по адресу: 198904, г. Старый Петергоф, ул. 1 Мая, д. 100, ЛГУ, филиал ЗФТШ при МФТИ.

Учащиеся Амурской, Иркутской, Камчатской, Кемеровской, Магаданской, Новосибирской, Омской, Сахалинской, Томской, Тюменской и Читинской областей, Алтайского, Красноярского, Приморского и Хабаровского краев, Бурятской, Тувинской и Якутской АССР высылают работы по адресу: 660062, г. Красноярск, пр. Свободный, д. 79, Госуниверситет, филиал ЗФТШ при МФТИ.

Ниже приводятся вступительные задания по физике и математике.

В задании по физике задачи 1—5 предназначены для учащихся седьмых классов, задачи 4—9 — для восьмых классов, задачи 8—14 — для девятых классов.

В задании по математике задачи 1—5 предназначены для учащихся седьмых классов, 3—9 — для восьмых классов, 6—12 — для девятых классов.

Вступительное задание

Физика

1. Движущаяся равномерно подводная лодка посылает по ходу движения ультразвуковые импульсы длительностью T. Импульсы отражаются от неподвижного препятствия и возвращаются к лодке, причем их длительность оказывается равной τ. Определите скорость лодки, если скорость звука в воде равна v.

2. Человек стоит на расстоянии 6 м от реки. В 34 м от реки горит костер. Расстояние между перпендикулярами, соединяющими прямолинейный берег реки с человеком и костром, равно 30 м. Человек бежит со скоростью 5 м/с к реке, зачерпывает ведром воду, затем бежит к костру и заливает его. Каково минимальное время, необходимое ему для этого, если на то, чтобы зачерпнуть воду, нужно 5 с?

3. Высота надводной части лодки-плоскодонки равнялась 20 см. К днищу лодки со стороны воды по всей его площади приклеили пластину пенопласта (плотность равна 0,4 г/см^3) толщиной 5 см. Определите высоту надводной части лодки после наклеивания пенопласта.

4. При изготовлении льда в домашнем холодильнике потребовалось 5 мин, чтобы охладить воду от +4 °C до 0 °C, и еще 1 ч 40 мин, чтобы превратить ее в лед. Определите удельную теплоту плавления льда, если удельная теплоемкость воды равна $4{,}2\cdot 10^3$ Дж/(кг·°C).

5. В термосе хранится жидкий азот при температуре —195 °C в количестве 2 *л*. За сутки испарилась половина азота. Определите удельную теплоту испарения азота, если известно, что 40 г льда в том же термосе тает за 22 ч 30 мин. Скорость подвода тепла в термос пропорциональна разности температур внутри и снаружи термоса. Температура окружающего воздуха 20 °C. Плотность жидкого азота равна 300 кг/м^3.

6. Легкая пружина с жесткостью k и длиной l стоит вертикально на столе. На нее падает

шарик массой m. На какой высоте от поверхности стола шарик будет иметь максимальную скорость?

7. Искусственный спутник, используемый в системе телесвязи, запущен в плоскости земного экватора, так, что все время находится в зените одной и той же точки земного шара. Во сколько раз радиус орбиты спутника больше радиуса Земли, равного 6400 км? Ускорение свободного падения у поверхности Земли равно 9,8 м/с^2.

8. Два одинаковых нагревателя включены последовательно в сеть с напряжением 220 В. В сеть с каким напряжением нужно включить эти два нагревателя, соединенные параллельно, чтобы на них выделялась та же мощность?

9. Ядро толкнули горизонтально, сообщив ему кинетическую энергию 45 Дж. При падении в песок скорость ядра была направлена под углом 30° к горизонту. Найдите количество теплоты, выделившееся при ударе о песок. Ядро в полете не вращалось.

10. Шайба скользит по льду хоккейной площадки от одних ворот к другим. Первую половину пути, где лед расчищен, она движется в области с коэффициентом трения μ_1, а вторую — с коэффициентом трения μ_2. Найдите отношение коэффициентов трения, если известно, что скорости шайбы у первых ворот, в середине площадки и у вторых ворот относятся как 4:3:1.

11. Баллон газовой плитки с объемом 0,5 л содержит 300 г пропана под давлением 16 атм. Что можно сказать об агрегатном состоянии пропана в баллоне: газ это или нет? Химическая формула пропана C_3H_8.

12. В тепловом процессе объем идеального газа изменяется линейно с давлением по закону $V=\beta p$, где β — постоянная. Во сколько раз изменяется давление газа при уменьшении температуры от 450 К до 200 К?

13. Внутри откачанной до глубокого вакуума установки расположен герметичный теплоизолированный сосуд, заполненный идеальным одноатомным газом. Сосуд закрыт сверху теплонепроницаемым поршнем. Газ занимает объем V. На поршень ставят гирю той же массы, что и масса поршня. Найдите объем газа в новом положении равновесия.

14. Взрывная камера заполняется смесью кислорода и водорода при температуре 300 К и общем давлении 1 атм. Парциальные давления кислорода и водорода одинаковы. После герметизации камеры производится взрыв. Найдите давление внутри камеры после охлаждения продуктов реакции до температуры 373 К.

Математика

1. Лодка спускается вниз по течению реки на 6 км, а затем возвращается обратно. Скорость течения реки равна 2 км/ч. В каких пределах может лежать собственная скорость лодки, если известно, что поездка заняла не менее 4 часов?

2. В прямоугольном треугольнике из вершины прямого угла проведены высота, биссектриса и медиана. Докажите, что биссектриса делит угол между медианой и высотой на две равные части.

3. Найдите последнюю цифру числа

$$19^{87}-87^{19}.$$

4. В четырехугольнике $ABCD$

$$\angle ABD=\angle ACD=90^\circ,\ AB=BD=5,\ CD=1.$$

Найдите BC.

5. Докажите, что не существует таких целых чисел x и y, что

$$3x-y^2=1987.$$

6. Докажите, что если m и n — натуральные числа, то и

$$\frac{(1+m+\ldots+m^n)^2-m^n}{1+m+\ldots+m^{n-1}}$$

— натуральное число.

7. Корни уравнения

$$x^3-3x^2+ax+1=0$$

образуют арифметическую прогрессию. Найдите значение параметра a и решите уравнение.

8. Найдите многочлен четвертой степени с целыми коэффициентами, корнем которого является число $\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

9. Найдите все точки на земном шаре, обладающие следующим свойством: если пройти из такой точки 1 км на юг, затем 1 км на восток и 1 км на север, то вы снова окажетесь в исходной точке.

10. Дан параллелограмм $ABCD$ площади s. Точка P лежит на прямой BD, $\vec{DP}=\vec{BD}$, точка Q — на прямой DC, $\vec{CQ}=\vec{DC}$. Найдите площадь треугольника APQ.

11. Решите уравнение

$$4\sin^2x-4\cos x\cdot\sin y-5=0.$$

12. На координатной плоскости рассматриваются правильные треугольники, у которых две вершины лежат на прямой $y=x+2$, а координаты третьей вершины удовлетворяют неравенству

$$x^2\leqslant y\leqslant x+2.$$

Найдите наибольшее возможное значение площади рассматриваемых треугольников.

К нашим читателям

Если вы не успели подписаться на журнал «Квант» на 1987 год, не огорчайтесь. Подписку можно оформить в агентствах «Союзпечати», на почтамтах и в отделениях связи, начиная с любого месяца (только это нужно сделать заблаговременно — не позднее чем за полтора месяца). Индекс нашего журнала в каталоге «Союзпечати» 70465, цена одного номера 40 копеек.

Избранные школьные задачи

1. По условию $1=(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz$, но $xy+xz+yz=0$.

2. Пусть K — середина AF и L — середина BF (сделайте рисунок). Четырехугольник $EFKL$ — параллелограмм, поскольку EK параллельна BF и EL параллельна AF (EK и EL — средние линии в треугольнике ABF). Пусть H — середина EF; тогда KL проходит через H, причем $KH=LH$. Точно так же доказывается, что отрезок MN, соединяющий середины отрезков DE и CE, проходит через точку H и делится этой точкой пополам. Поэтому четырехугольник $KLMN$ — параллелограмм.

3. В точке D. Указание. Постройте графики движения обоих пловцов и убедитесь в том, что пловцы будут через раз встречаться в точках C и D.

4. $\frac{\pm3\pm\sqrt{17}}{2}$. Указание. Положите $u=\frac{x+2}{x+1}$, $v=\frac{x-2}{x-1}$. Тогда $u^2+v^2-\frac{5}{2}uv=0$, откуда либо $u=2v$, либо $v=2u$.

5. 30°. Решение (доступное восьмиклассникам, не знающим тригонометрии). Пусть C' — точка, симметричная точке C относительно прямой AB (сделайте рисунок). Опишем около треугольника CAC' окружность. Поскольку $\angle CAC'=150°$, дуга CAC' содержит 60°, и поэтому хорда CC' равна радиусу окружности, а точка B является ее центром. Отсюда $\angle B=30°$.

6. $\frac{5}{2}\leqslant x\leqslant 3$. Указание. Положите $y=\sqrt{2x-5}$. Тогда $y\geqslant 0$, и $(y+3)+|y-1|=4$. Отсюда $0\leqslant y\leqslant 1$.

7. $2\sqrt{S_1S_2}$. Решение. Пусть площадь треугольника ABC равна S. Треугольник ABC подобен треугольникам AMK и CLM (сделайте рисунок), поэтому
$$\sqrt{\frac{S_1}{S}}=\frac{AL}{AC},\quad \sqrt{\frac{S_2}{S}}=\frac{LC}{AC},$$
откуда
$$\frac{\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}}{\sqrt{S}}=\frac{AL+LC}{AC}=1,$$
то есть $S=S_1+S_2+2\sqrt{S_1S_2}$.

8. Имеем
$$\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)<1,$$
$$\operatorname{tg}\gamma\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}<1$$
(по условию $(1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta>0)$),
$$\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}(\alpha+\beta)<1,\ \operatorname{tg}\gamma<\operatorname{ctg}(\alpha+\beta),$$
$$\operatorname{tg}\gamma<\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha-\beta\right),\ \gamma<\frac{\pi}{2}-\alpha-\beta,$$
$$\alpha+\beta+\gamma<\frac{\pi}{2}.$$

9. $x=y=z=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$. Указание. Ясно, что $x\geqslant1$, $y\geqslant1$, $z\geqslant1$. Докажем, что $x=y=z$. Пусть не все эти числа равны. Выберем из них наибольшее. Предположим, что это — x, то есть $x\geqslant y$, $x\geqslant z$. Так как $y=(x-1)^2$, $z=(y-1)^2$ и $x=(z-1)^2$, из неравенства $x\geqslant y$ получаем неравенство $(z-1)^2\geqslant(x-1)^2$, из которого следует, что $z\geqslant x$. Поэтому $x=z$. Аналогично $x=y$.

10. Построим $\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{CN}$; пусть P — середина отрезка MN, Q — середина отрезка $N'M$ (рис. 1). Имеем $\overrightarrow{N'N}=\overrightarrow{AC}$, следовательно, $\overrightarrow{QP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. Треугольник $AN'M$ равнобедренный, так что точка Q бежит по биссектрисе угла, равного углу B. Точка P получается из точки Q сдвигом на постоянный вектор. Таким образом, искомое геометрическое место — отрезок. Его концы легко находятся.

Ответ (мы считаем для определенности, что $AB>BC$): отрезок, соединяющий середину стороны AC с серединой отрезка BB'; где B' — такая точка стороны AB, что $AB'=BC$. (Кстати, этот отрезок параллелен биссектрисе угла B.)

11. $(1+\sqrt{3})\left(1\pm\frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{2}}\right)$. Указание. $(1+x)^4=2+2x^4$, а $(1+x)^4-(1-x)^4=2+12x^2+2x^4$, откуда $(1-x)^4=12x^2$, то есть $(1-x)^2=\sqrt{12}|x|$. Случай $x\leqslant0$ решений не имеет; в случае $x>0$ получаем квадратное уравнение $(1-x)^2=2\sqrt{3}x$, корни которого $x_{1,2}=1+\sqrt{3}\pm\sqrt{3+2\sqrt{3}}=(1+\sqrt{3})\left(1\pm\frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{2}}\right)$.

12. а) $b_c=\frac{2ab}{a+b}\cos\frac{\gamma}{2}$. Указание. Если CL — биссектриса угла C, то $S_{CAL}+S_{CBL}=\frac{1}{2}b\cdot l_c\sin\frac{\gamma}{2}+\frac{1}{2}al_c\sin\frac{\gamma}{2}=S_{ABC}=\frac{1}{2}\times$ $\times ab\sin\gamma$.

б) Пусть $l_c=l_b$. Докажем, что углы C и B равны. Предположим, что это не так. Пусть $\angle C=\gamma$, $\angle B=\beta$ и для определенности $\gamma>\beta$. Тогда $c>b$. Сравнивая теперь выражения $l_c=\frac{2ab}{a+b}\cos\frac{\gamma}{2}$ и $l_b=\frac{2ac}{a+c}\cos\frac{\beta}{2}$, получаем, что $l_c<l_b$ (поскольку $\cos\frac{\gamma}{2}<\cos\frac{\beta}{2}$ и $\frac{b}{a+b}<\frac{c}{a+c}$). Противоречие. (Попутно мы доказали, что в треугольнике меньшему углу соответствует большая биссектриса.)

13. Из точек прямой $y=-\frac{1}{4}$. Решение. Уравнение касательной, проходящей через точку $(c;c^2)$ графика функции $y=x^2$, имеет вид $y=2c(x-c)+c^2=2cx-c^2$. Если через некоторую точку $(x_0;y_0)$ плоскости проведены две каса-

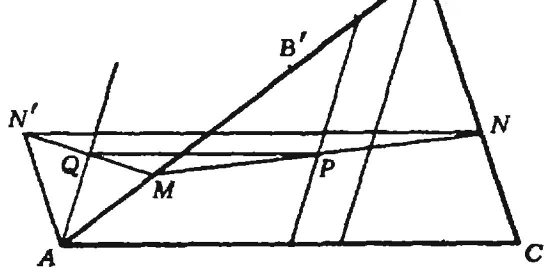


Рис. 1.

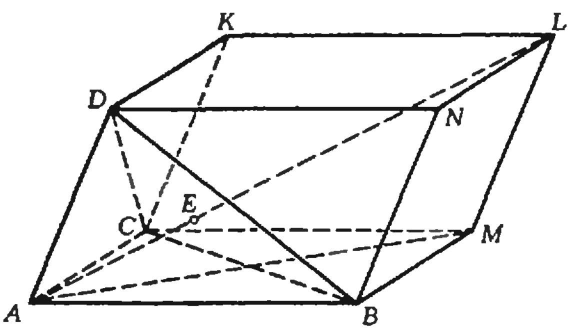


Рис. 2.

тельные с уравнениями $y=2cx-c^2$ и $y=2bx-b^2$, то $y_0=2cx_0-c^2$ и $y_0=2bx_0-b^2$. Если, кроме того, эти касательные перпендикулярны, то $2c\cdot 2b=-1$, откуда $bc=-\frac{1}{4}$.

Из выписанных уравнений получаем $2cx_0-c^2=2bx_0-b^2$, или $x_0=\frac{b+c}{2}$ $(b\neq c)$. Подставляя x_0 в первое уравнение, получим $y_0=bc=-\frac{1}{4}$.

Итак, из перпендикулярности касательных к параболе $y=x^2$, проходящих через точку $(x_0;\ y_0)$, следует, что $y_0=-\frac{1}{4}$. Обратно, нетрудно доказать, что касательные, проведенные к графику функции $y=x^2$ из любой точки прямой $y=-\frac{1}{4}$, перпендикулярны.

14. 2. Указание. $3^{\lg 3+\lg_3 10}=10\cdot 3^{\lg 3}<10\sqrt{3}<27=3^3$ (мы воспользовались тем, что $\lg 3<\frac{1}{2}$).

15. а) Пусть M — любая точка пространства. Рассмотрим векторы $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{MC}$ и $\overrightarrow{MD}$. Если точка O — искомая, то $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OD}=4\overrightarrow{MO}$. Итак, $\overrightarrow{MO}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD})$. Тем самым доказано, что точка O существует. Пусть O и O_1 — две точки, удовлетворяющие условию задачи. Но тогда $\overrightarrow{0}=\overrightarrow{O_1A}+\overrightarrow{O_1B}+\overrightarrow{O_1C}+\overrightarrow{O_1D}=4\overrightarrow{OO_1}$, откуда $\overrightarrow{OO_1}=\overrightarrow{0}$. То, что точка O лежит внутри пирамиды, почти очевидно: если бы она оказалась вне нее, то векторы $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ и $\overrightarrow{OD}$ лежали бы по одну сторону от некоторой плоскости, проведенной через точку O, и поэтому их сумма не могла бы равняться $\overrightarrow{0}$.

б) Мы уже видели, что для любой точки M: $\overrightarrow{MO}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD})$. Положив здесь $M=A$, получим $\overrightarrow{AO}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD})$. Поэтому точка O лежит на диагонали параллелепипеда $ACMBDKLN$ (рис. 2), построенного на ребрах AB, AC, AD, и длина отрезка AO равна $\frac{1}{4}$ длины диагонали AL. Плоскость DBC пересекается с AL в точке E пересечения медиан треугольника DBC, причем $AE=\frac{1}{3}AL$. Отсюда уже без труда получаем утверждение задачи.

в) Аналогично а).

Атомная физика в задачах

1. $\mathscr{E}_2=\mathscr{E}_1+\frac{hc}{e}\,\frac{\lambda_1-\lambda_2}{\lambda_1\lambda_2}=2{,}24$ В.

Указание. ЭДС фотоэлемента определяется задерживающим напряжением: $\mathscr{E}=U_з=E_k/e=(h\nu-A_{вых})/e$.

2. Поскольку скорость электрона соизмерима со скоростью света, для определения кинетической энергии электрона надо использовать релятивистскую формулу:

$$E_k=\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}-m_0c^2\approx 7{,}4\cdot 10^{-15}\ \text{Дж}.$$

Тогда

$$\lambda_к=\frac{hc}{E_k}\approx 2{,}7\cdot 10^{-11}\ \text{м}.$$

3. $E_{k\,\min}=2\Delta E_{возб}=3/2E_{ион}=20{,}4$ эВ.

4. $T=\frac{\tau}{\log_2(\Delta t_1/\Delta t_2)}\approx 934$ мин $\approx 15{,}6$ ч.

XXVII Международная математическая олимпиада

1. Для решения задачи достаточно доказать, что для любого натурального числа d хотя бы одно из чисел $2d-1$, $5d-1$ или $13d-1$ не является квадратом целого числа. Кстати, числа $2\cdot 5-1=9$, $2\cdot 13-1=25$ и $5\cdot 13-1=64$ являются квадратами целых чисел.

Доказательство проведем методом «от противного» — предположим, что при некотором натуральном числе d имеют место равенства $2d-1=n^2$, $5d-1=m^2$, $13d-1=k^2$. Из записи числа n^2 следует, что оно нечетно, значит и n — нечетно, то есть $n=2p+1$; подставляя это значение вместо n, получаем $2d-1=4p^2+4p+1$ или $d=2p(p+1)+1$, но произведение двух последовательных целых чисел всегда четно, поэтому $p(p+1)=2r$, а $d=4r+1$. Заменяя d на полученное выражение в остальных двух соотношениях, получим $m^2=20r+4$, $k^2=52r+12$. Отсюда видно, что m и k — четные числа; обозначим $m=2a$, $k=2b$. Заменяя m и k на $2a$ и $2b$ в этих равенствах и сокращая на 4, получим $a^2=5r+1$, $b^2=13r+3$. Вычтем из второго равенства первое: $b^2-a^2=8r+2$. Следовательно, b^2-a^2 делится на 2, но не делится на 4; но $(b^2-a^2)=(b-a)(b+a)$ и, если a и b числа одинаковой четности, b^2-a^2 делится на 4, а если разной, то не делится на 2. Противоречие.

Можно было получить решение и проще, рассмотрев остатки от деления этих чисел на 16, заметив при этом, что квадрат целого числа при делении на 16 может давать в остатке лишь числа 0, 1, 4 и 9.

2. Решение задачи легко следует из следующего утверждения: *если совершено несколько поворотов с суммой углов, кратной 360°, то результирующее преобразование плоскости есть параллельный перенос.* Доказательство этого утверждения таково. Пусть при таком преобразовании точка M перешла в точку M_1, а точка N в точку N_1. Если мы докажем, что $\overrightarrow{MM_1}=\overrightarrow{NN_1}$, то утверждение будет доказано. Рассмотрим вектор $\overrightarrow{MN}$; после каждого из поворотов его длина не меняется, а направление изменяется на угол поворота. После последнего поворота его направление совпадает с первоначальным, поэтому полученный вектор $\overrightarrow{M_1N_1}$ равен вектору $\overrightarrow{MN}$; следовательно, четы-

рехугольник MNM_1N_1 — параллелограмм, отсюда и следует наше утверждение.

Теперь покажем, как отсюда вытекает решение задачи. Если точка P_3 не совпадает с точкой P_0, то последовательность первых трех поворотов на 120°, рассматриваемых как повороты плоскости, есть параллельный перенос на вектор $\overrightarrow{P_3P_0}$, а 1986 поворотов есть 1986:3=662 таких параллельных переноса, то есть $\overrightarrow{P_0P_{1986}}=662\overrightarrow{P_0P_3}$.

Значит, точка P_{1986} совпадает с точкой P_0 лишь в случае, когда точка P_3 совпадает с точкой P_0, то есть параллельный перенос совершается на нулевой вектор.

Возьмем в качестве точки P_0 точку A_1, тогда точка P_1 тоже совпадет с точкой A_1. Отметим теперь точку P_2. Где должна лежать точка A_3, чтобы поворот вокруг нее по часовой стрелке перевел точку P_2 в точку P_1? Из равенства расстояний точки A_3 до точек A_1 и P_2 следует, что точка лежит на биссектрисе угла $A_1A_2P_2$, при этом угол $P_2A_3A_1$ равен 120°. Отсюда уже просто получить, что треугольник $A_1A_2A_3$ — равносторонний, поскольку $\angle A_1A_2A_3=\angle A_2A_3A_1=60°$.

3. См. решение задачи М1017.

4. См. решение задачи М1018.

5. Искомой функцией будет функция равная $2/(2-x)$ для $0\leqslant x<2$ и равная нулю для $x\geqslant 2$. Докажем это. Сначала покажем, что эта функция удовлетворяет всем трем условиям. Пусть $x\geqslant 2$, тогда условие (1) автоматически выполняется: слева и справа стоят нули, так как $f(x)$ и $f(x+y)$ равны нулю. Если $x<2$, то

$$f(y)=\frac{2}{2-y}\,f(xf(y))f\left(\frac{2x}{2-y}\right)=$$
$$=f\left(2+\frac{2(x+y-2)}{2-y}\right).$$

Теперь, если $x+y\geqslant 2$, то слева и справа снова стоят нули, если же $x+y<2$, то

$$\frac{2x}{2-y}<2 \text{ и } f(y)f\left(\frac{2x}{2-y}\right)=$$
$$=\frac{2}{2-y}\cdot\frac{2}{2-\dfrac{2x}{2-y}}=\frac{2}{2-(x+y)}=f(x+y).$$

Итак, предложенная функция удовлетворяет условиям задачи. Докажем ее единственность. Пусть $x\geqslant 2$, тогда положим $x=2+t$. Подставив в условие (1), получаем $f(x)=f(2+t)=f(2)f(f(2)t)$. Но $f(2)=0$, поэтому $f(x)=0$ при $x\geqslant 2$.

Пусть $x<2$, тогда положим $t=2-x$, то есть $x+t=2$. Из условий (1) и (2) получаем $0=f(2)=f(x+t)=f(x)f(f(x)t)$. Но из условия (3) следует, что $f(x)\neq 0$; поэтому $f(f(x)t)=0$, а это по условию (3) может быть лишь при $f(x)t\geqslant 2$; вспоминая, что $t=2-x$, получаем, что $f(x)\geqslant 2/(2-x)$. Покажем, что в неравенстве $f(x)t\geqslant 2$ знак $\geqslant$ нужно изменить на знак $=$. Действительно, если $f(x)t>2$, то можно уменьшить число T до числа t_1 так, чтобы неравенство все еще имело место, но тогда слева в условии (1) будет по-прежнему стоять 0, а справа будет стоять число $f(x+t_1)$, где $x+t_1<2$, и по условию (3) $x+t_1$ отлично от нуля. Таким образом, для $x<2$ имеем $f(x)=2/(2-x)$.

6. См. решение задачи М1019.

«Квант» для младших школьников

1. $(a^2+b^2)^2=a^4+2a^2b^2+b^4=a^4-2a^2b^2+b^4+4a^2b^2=(a^2-b^2)^2+(2ab)^2$.

2. 15306+15306=30612.

3. Сумерки — это полутьма между заходом Солнца и наступлением ночи. В этот период освещение вызывается рассеянием солнечного света атмосферой на большой высоте, куда еще проникают лучи Солнца. Высоко в горах слой атмосферы над Землей меньше, поэтому и время, когда этот слой рассеивает солнечный свет после захода Солнца, меньше. Кстати, на планетах, лишенных атмосферы, сумерек нет. Нет их и на Луне.

4. Быстрее — от станции Физическая, поскольку после прибытия туда путь до дома проходится вдвое скорее, чем оставшийся путь от станции Математическая.

5. См. рис. 3

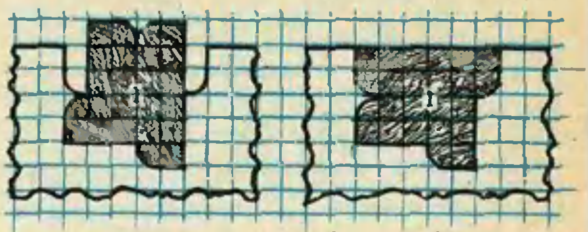


Рис. 3.

«Квант» для младших школьников
(см. «Квант» № 11)

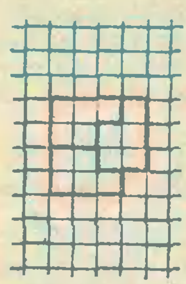
1. См. рис. 4

2. Шпалы уменьшают давление рельсов на землю и тем самым препятствуют вдавливанию их в грунт.

3. 818+88=906.

4. Если отношение плеч весов было $a:b$, то вес x, полученный при первом взвешивании, из соотношения $a\cdot x=1\cdot b$ равен b/a, а вес y, полученный при втором взвешивании, равен a/b. Но сумма $b/a+a/b$ всегда больше 2, если $a\neq b$, так как эта сумма равна $(a-b)^2/ab+2$. Правильно же взвесить 1 кг орехов можно так: уравновесить гирю орехами, а потом снять гирю и положить на ее место орехи до уравновешивания.

5. Проведем хорды AC и BD (рис. 5). Углы CDB и CAB равны, как опирающиеся на одну дугу. Из параллельности отрезков DB и KN, а также AC и MN теперь следует равенство рассматриваемых в задаче углов.



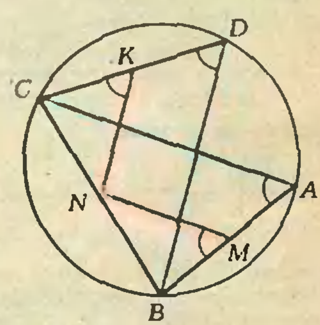


Рис. 4. *Рис. 5.*

Шахматная страничка
(см. «Квант» № 9)

Обе задачи принадлежат известному американскому проблемисту прошлого века В. Мередиту.

Задание 17 (В. Мередит, 1875 г.). Первый ход неожиданный, так как дается шах — **1. Cf3+ Kpf4,** а второй поражает своей парадоксальностью — **2. Фа5!!** Грозит 3. Фс7×. Ответ 2...Ф:а5 или 2...Кс4 не спасает из-за 3. Ке2×, конь g7 не может сдвинуться с места ввиду 3. Kh5×.

Задание 18 (В. Мередит, 1889 г.). **1. Cd7!** Слон становится в засаду. **1...d5** (1...Кр:е4 2. Фс2+ Kpd5 3. Фс6×; 2...d3 3. Фс4×) **2. Фс8!!** Ферзь пришел поддержать слона. **2...Кр:е4** (2...de 3. Cb5×) **3. Cf5×.**

Напечатано в 1986 году

Дорогие читатели! Для улучшения работы журнала нам хотелось бы знать ваше мнение о материалах, опубликованных в «Кванте» в 1986 году. Просим ответить на вопросы нашей анкеты.

Ответы посылайте на отдельном листе бумаги, сохранив нумерацию вопросов, до 20 февраля 1987 года.
Наш адрес: 103006 Москва К-6, ул. Горького, д. 32/1, «Квант», «Анкета».

1. Место учебы (город, село, класс, курс) или работы (профессия, специальность) и возраст.

2. Наиболее и наименее интересные, по вашему мнению, статьи по математике этого года.

3. Наиболее и наименее интересные статьи по физике этого года.

4. Самая удачная и неудачная, на ваш взгляд, обложка журнала в этом году.

5. Какие рубрики журнала вам нравятся, какие новые рубрики следовало бы ввести?

6. Какие материалы этого года помогли в вашей учебе, что вы искали в «Кванте» в 1986 году, но не нашли?

7. О чем хотели бы вы прочитать на страницах нашего журнала в 1987 году?

Номер подготовили:
А. А. Варламов, А. Н. Виленкин, А. А. Егоров, И. Н. Клумова, Т. С. Петрова, А. Б. Сосинский, В. А. Тихомирова

Номер оформили:
Ю. А. Ващенко, М. Б. Дубах, С. А. Жигалкин, С. В. Иванов, Д. А. Крымов, Э. В. Назаров, А. М. Пономарева, И. Е. Смирнова, Е. К. Тенчурина, П. И. Черкуский, В. Б. Юдин

Заведующая редакцией Л. В. Чернова

Редактор отдела художественного оформления
С. Б. Иванов

Художественный редактор Т. М. Макарова

Корректор Н. Д. Храпко

103006 Москва К-6,
ул. Горького, 32/1, «Квант»,
тел. 250-33-54

Сдано в набор 22.10.86. Подписано к печати 24.11.86.
Т-28901. Бумага 70×108/16.
Печать офсетная. Усл. кр.-отт. 23,8.
Усл. печ. л. 5,6. Уч.-изд. л. 7,79.
Тираж 195 669 экз.
Цена 40 коп. Заказ 2846

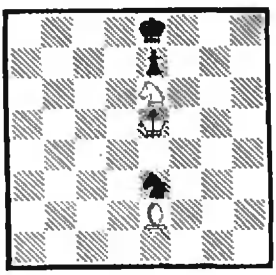
Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
ВО «Союзполиграфпром»
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли
142300, г. Чехов Московской области

Шахматная страничка

Консультирует — экс-чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Е. Карпов. Ведет страничку мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Я. Гик.

СИММЕТРИЯ И АСИММЕТРИЯ

В математике, физике, кристаллографии идеи симметрии позволяют решать многие задачи. В живописи, прикладном искусстве симметрия — нередкий атрибут произведения. Немало идей и мотивов симметрии содержится и в шахматах — как в практической игре, так и в композиции. Особый интерес вызывают задачи и этюды, в которых при симметричной начальной позиции решение принципиально асимметрично.

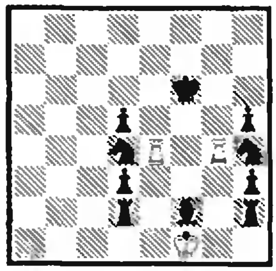


В. Дейк, 1967 г. Выигрыш.

Забавная ситуация: все фигуры сосредоточились на одной вертикали доски. Задача белых — поймать коня противника. Вот основной вариант решения. 1. Kd4! Kpf7 2. Kpe4 e5! 3. Kp:e5 Kg2 4. Ch5+ Kpg7 5. Kf5+ Kph7 6. Cf3 Ke1 7. Ce4 Kpg6 8. Kpf4 Kpf6 9. Kpg3 Kpe5 10. Cb1, и цель достигнута. Не проходит 1. Kf4? Kpd7 2. Kpe4 e5 3. Kp:e5 Kpc6 4. Kpe4 Kc2 5. Kd3 Ka3!, и «лишняя» вертикаль a выручает черного коня.

Д. Бройер, 1948 г. Мат в 4 хода.

Фигуры расположены симметрично. Какова же роль трех «лишних» пустых вертикалей a, b, c, *нарушающих* симметрию диаграммы? Поразительно, но именно на этих трех вертикалях разворачиваются решающие события 1. Ca7! (симметричного перемещения слона на королевский фланг не существует) 1...f6 2. Kb6! Старинная индийская тема — действие дальнобойной фигуры временно перекрывается, неприятельский король получает свободу, правда, мнимую. 2... Kpe3 3. Kc4+ Kpf3 4. Kd2×. Эффектная задача-миниатюра.



В. Хеньонен, 1967 г. Ничья.

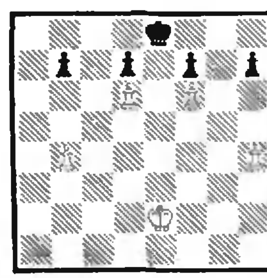
У черных подавляющий материальный перевес, единственный шанс белых — превратить свои две ладьи в «бешеных». 1. Лg6+! K:g6 2. Лe6+ Kpg5 3. Л:g6+ Kpf4 4. Лg4+ Kpe5 5. Лe4+ Kpd6 6. Лe6+ Kpc5 7. Лc6+ Kpb4 8. Лc4+ Kpa5 9. Лa4+, и короля, двигающегося по маршруту Kpb6—c5—b4—a3—b2—c3—b4, «бешеная ладья» преследует по маршруту Лa6—c6—c4—a4—a2—c2—c4+. Ничья. Однако не спасает симметричное 1. Лe6+? K:e6 2. Лg6+ Kpe5 3. Л:e6+ Kpd4 4. Лe4+ Kpc5 5. Лc4+ Kpb5 6. Лb4+ Kpc6 7. Лc4+ Cc5, и белый король распатован.

Э. Зеплер, 1946 г. Выигрыш.

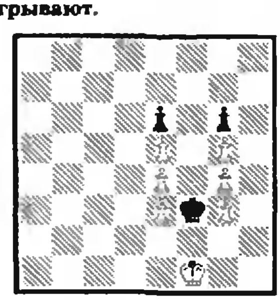
Какой пешке следует двинуться вперед: левой или правой? Никакой! После 1. Kpe5!! белые сохраняют симметрию и ждут, когда черные первыми нарушат ее. Упускает победу как 1. b5? Kd4+ 2. Kp:e7 Kpf4 3. b6 Kc6+, так и 1. h5 Kf4+ 2. Kp:e7 K:h5! 3. b5 Kf4 4. Kpd6 Kd3 5. b6 Kb4 и 6...Ka6. Обе попытки (симметричные!) с асимметричной игрой не удались. 1...Kf4 (1...Kpf3 2. h5!) 2. b5 Kpf3 3. b6 Kpg4 4. h5!, 2...Kg6+ 3. Kpe6 Kpe4 4. b6 Kf4+ 5. Kpf7! с выигрышем.

Здесь уместно упомянуть об одной симметричной диаграмме, помещенной в «Кванте» № 6 за 1986 год. Речь идет о позиции В. Попова, побившего старинный рекорд Г. Дьюдени — на доске одновременно находятся 8 ферзей, 8 ладей, 14 слонов, 21 конь и 9 королей — всего 60 фигур, причем одноименные фигуры не бьют друг друга. Многим читателям журнала удалось побить этот рекорд, расставив 61, 62 или даже 63 фигуры! В следующем году мы еще вернемся к этой теме, а пока что заметим, что ни в одной из присланных позиций не достигаются сразу три максимума. А ведь именно так ставилась задача Дьюдени — ферзей, ладей и слонов на доске должно быть максимально возможное количество.

Конкурсные задания



23. Белые начинают и выигрывают.



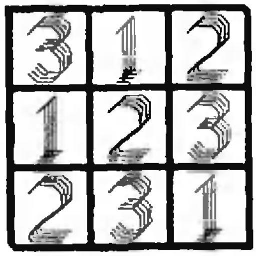
24. Белые начинают и делают ничью.

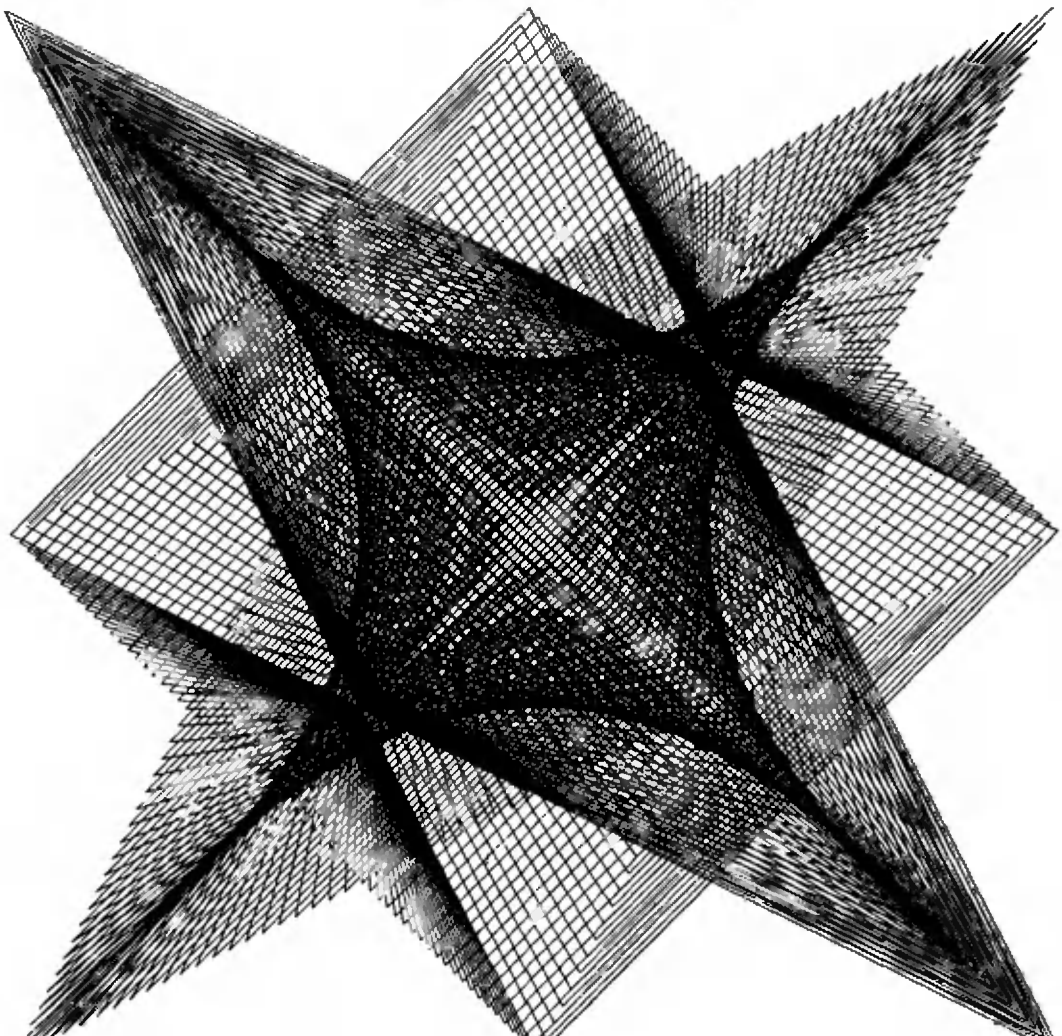
Срок отправки решений — 20 февраля 1987 г. с пометкой на конверте «Шахматный конкурс «Кванта», задания 23, 24».

Индекс 70465

Цена 40 коп.

Рисунок, который вы видите перед собой, создан с помощью ЭВМ. Алгоритм построения, записанный на языке фортран, вводится в ЭВМ, а подключенное к ЭВМ графическое устройство выполняет построение. Алгоритм создает человек, рассчитывает и рисует — ЭВМ.

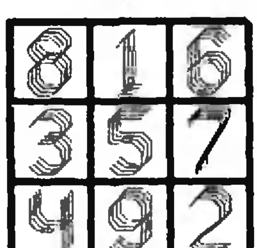




Алгоритм построения данного рисунка основан на двух (изображенных вверху и внизу) магических квадратах. Магический квадрат — это квадратная таблица чисел, суммы которых в каждой строке, каждом столбце и двух диагоналях равны. Для изображенного вверху квадрата сумма равна 6, для изображенного внизу — 15.

Заметим, что если мы разработали алгоритмы построения, то это еще не означает, что мы знаем, как будет выглядеть построенный по этому алгоритму рисунок, как линии будут взаимодействовать между собой. Например, формы и фигуры муара данного рисунка зависят не только от некоторых параметров алгоритма, но даже от толщины пера, которым они нарисованы.

Продемонстрировать нам окончательный вид рисунка (построить который вручную чаще всего невозможно) — задача ЭВМ.



С. А. Жигалкин